О НѢКОТОРЫХЪ ВИДОИЗМѢНЕНІЯХЪ

НАЧАЛА ГАМИЛЬТОНА

ВЪ ПРИМѢНЕНІИ КЪ РѢШЕНІЮ ВОПРОСОВЪ

МЕХАНИКИ ТВЕРДАГО ТѢЛА.

РАЗСУЖДЕНІЕ

приватъ-доцента Императорскаго Юрьевскаго Университета

Г. Колосова.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
Типографія Ю. Н. Эрлихъ, Садовая № 9.
1903.



Kolosov, G

О НѢКОТОРЫХЪ ВИДОИЗМѢНЕНІЯХЪ

НАЧАЛА ГАМИЛЬТОНА

ВЪ ПРИМѢНЕНІИ КЪ РѢШЕНІЮ ВОПРОСОВЪ

МЕХАНИКИ ТВЕРДАГО ТѢЛА.

РАЗСУЖДЕНІЕ

приватъ-доцента Императорскаго Юрьевскаго Университета

Г. Колосова.



С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
Типографія Ю. Н. Эрлихъ, Садовая, № 9
1903.

По опредѣленію Физико-математическаго факультета Императорскаго С.-Петербургскаго Университета печатать разрѣшается, 28 Марта 1903 года.

Деканъ *А. Ждановъ*.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Въ 1888 году въ «Sitzungsberichte» Берлинской академіи наукъ помѣщена статья H. Minkowski in Bonn (нынѣ проф. въ Геттингенѣ) «Über die Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit», въ которой задача о движеніи твердаго тѣла въ несжимаемой жидкости приведена при отсутствіи внѣшнихъ силъ къ задачѣ аналогичной задачѣ о геодезической линіи на эллипсоидѣ. При этомъ Minkowski высказываетъ безъ полнаго доказательства, намѣчая лишь путь его [1]) слѣдующее интересное предложеніе, которое можетъ въ данной задачѣ замѣнить начало Гамильтона.

Пусть $d\sigma$ проэкція пути за время *dt какой нибудь* точки тѣла на неизмѣнное въ пространствѣ направленіе главнаго вектора количествъ движенія тѣла, а $d\sigma_1$ уголъ поворота *какой нибудь* прямой неизмѣнно связанной съ тѣломъ вокругъ вышеуказаннаго направленія (уголъ между плоскостью направленій главнаго вектора количествъ движенія и прямой въ 1-мъ ея положеніи и плоскостью направленій того же вектора и прямой во 2-мъ ея положеніи). Тогда

$$\delta \int (T\,dt - J\,d\sigma - J_1\,d\sigma_1) = 0 \text{ }^{1}),$$

гдѣ J^2 есть постоянная 1-го интеграла Киргоффа дифференціальныхъ уравненій движенія

$$\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial w}\right)^2 = J^2,$$

а JJ_1 — второго

$$\frac{\partial T}{\partial u}\frac{\partial T}{\partial p} + \ldots = JJ_1,$$

а T живая сила тѣла. При этомъ Minkowski высказываетъ *предположеніе*, что такого же рода законъ можетъ быть доказанъ для вращенія [2]) *тяжелаго тѣла вокругъ неподвижной точки.*

---

[1]) «Wie ich nach umständlichen Rechnungen gefunden habe» (seite 11).

[2]) Eine ganz ähnliche und nicht minder bemerkenswerthe Gelegenheit... bietet sich, worauf ich indessen hier nicht eingehe in dem Problem der Rotation eines, der Schwere unterworfenen Körpers um einen festen Punkt...

Кромѣ того Minkowski прибавляетъ, что если изъ подъинтегральнаго выраженія исключить dt (аналогично исключенію его изъ начала Гамильтона при выводѣ начала наименьшаго дѣйствія въ формѣ Лагранжа) и распространить $\int$ между 2-мя положеніями тѣла (конфигураціями), то интегралъ этотъ будетъ *minimum*'омъ [1]).

Заинтересовавшись результатами Минковскаго я задался первоначально цѣлью. ихъ провѣрить (такъ какъ статья, какъ уже я замѣтилъ написана въ формѣ конспекта безъ многихъ выводовъ) и распространить на указанный имъ случай вращенія тяжелаго тѣла. Оказалось:

во 1-хъ, что путь указываемый Минковскимъ для доказательства [1]) далеко не самый *простой*, а что оно вытекаетъ *почти безъ всякаго вывода* изъ надлежащимъ образомъ примѣненной къ разсматриваемому случаю теоріи такъ называемаго «видоизмѣненія» (modification) Лагранжевой функціи $T+U$, введеннаго Routh'омъ (въ «Stability of motion.» см. также его «Rigid Dynamics») [2]), но я не думаю, чтобы выводъ этотъ былъ извѣстенъ Минковскому потому что при его помощи,

во 2-хъ, предложенія Минковскаго примѣняются почти безъ всякаго вывода *не только* къ случаю вращенія *тяжелаго* твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки, но и къ *вращенію* твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки подъ вліяніемъ *какихъ угодно силъ* имѣющихъ потенціалъ при единственномъ условіи, чтобы они допускали *законъ площадей* въ нѣкоторой плоскости. При этомъ и здѣсь результаты эти могутъ быть найдены *двояко*: 1) при помощи видоизмѣненія Лагранжевой функціи Routh'а, 2) или при помощи пріема указаннаго Минковскимъ—но гораздо сложнѣе.

Но однако пріемъ этотъ имѣетъ то преимущество, что приводитъ задачу о вращеніи тѣла къ виду аналогичному движенію точки по поверхности эллипсоида — обстоятельство, позволяющее къ задачѣ о вращеніи тѣла около неподвижной точки примѣнить хорошо выработанные пріемы рѣшенія задачъ на движеніе точки по поверхности и привести легко къ квадратурамъ цѣлый рядъ задачъ, напр. задачу о вращеніи твердаго тѣла подъ вліяніемъ силъ, потенціалъ которыхъ

$$U = const \times (A\cos^2(z\Xi) + B\cos^2(zY) + C\cos^2(zZ))$$

(задача Brun'a, Appell. M. R. art. 500)

$$U = const \times (A\cos^2(z\Xi) + B\cos^2(zY) + \\ + C\cos^2(zZ))\left(\frac{1}{A}\sin^2(z\Xi) + \frac{1}{B}\sin^2(zY) + \frac{1}{C}\sin^2(zZ)\right)$$

---

[1]) Стр. 12 и 13; но доказательство имъ не приведено.

[2]) Съ такого же рода преобразованіями, но въ менѣе удобной формѣ мы встрѣчаемся впрочемъ уже въ теоріи «Ignoration of coordinates» у Томсона и Тэта. (Treatise on Natural Philosophy).

и т. д., гдѣ другими пріемами задачу рѣшить весьма трудно. Но во всѣхъ этихъ случаяхъ движенія тѣла *постоянная площадей* предполагается = 0. Примѣнивъ къ этимъ задачамъ преобразованіе независимой перемѣнной Liouville'я (см. стр. 23 моего разсужденія) можно по поводу ихъ высказать общее замѣчаніе, что задача о вращеніи тѣла при постоянной площадей = 0 *можетъ быть приведена къ задачѣ о движеніи точки при условіи, что постоянная произвольная въ интегралѣ живой силы равна нулю.*

Въ 3-хъ, что minimum въ интегралѣ Минковскаго получается не только въ формѣ аналогичной Лагранжевской формѣ начала наименьшаго дѣйствія, но и непосредственно въ формѣ аналогичной началу Гамильтона. Я называю, слѣдуя примѣру проф. Д. К. Бобылева эти интегралы «видоизмѣненнымъ дѣйствіемъ по Гамильтону» и «видоизмѣненнымъ дѣйствіемъ по Лагранжу».

Въ *4-хъ*, что преобразованіе Минковскаго можно остановить *на половинѣ его*, чего нельзя было предвидѣть, употребляя рекомендованный имъ пріемъ къ выводу найденнаго имъ предложенія [1]).

Дифференціальныя уравненія движенія твердаго тѣла въ жидкости принимаютъ при этомъ новый видъ, аналогичный виду дифференціальныхъ уравненій вращенія твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки:

$$\frac{d\frac{\partial\psi}{\partial p}}{dt} = r\frac{\partial\psi}{\partial q} - q\frac{\partial\psi}{\partial r} + \nu_z\frac{\partial\psi}{\partial\mu_z} - \mu_z\frac{\partial\psi}{\partial\nu_z}$$

$$\frac{d\frac{\partial\psi}{\partial q}}{dt} = p\frac{\partial\psi}{\partial r} - r\frac{\partial\psi}{\partial p} + \lambda_z\frac{\partial\psi}{\partial\nu_z} - \nu_z\frac{\partial\psi}{\partial\lambda_z}$$

$$\frac{d\frac{\partial\psi}{\partial r}}{dt} = q\frac{\partial\psi}{\partial p} - p\frac{\partial\psi}{\partial q} + \mu_z\frac{\partial\psi}{\partial\lambda_z} - \lambda_z\frac{\partial\psi}{\partial\mu_z}$$

$$\frac{d\lambda_z}{dt} = r\mu_z - q\nu_z$$

$$\frac{d\mu_z}{dt} = p\nu_z - r\lambda_z$$

$$\frac{d\nu_z}{dt} = q\lambda_z - p\mu_z,$$

гдѣ $\psi = T - Ju\lambda_z - Jv\mu_z - Jw\nu_z$, T живая сила тѣла, λ_z, μ_z, ν_z косинусы угловъ образованныхъ осями неизмѣнно связанныхъ съ тѣломъ съ осью z направленіе которой совпадаетъ съ направленіемъ неизмѣннаго по величинѣ и по направленію главнаго вектора количествъ движенія тѣла и жидкости.

---

[1]) Такому половинному преобразованію будетъ соотвѣтствовать условіе

$$\delta\int(T\,dt - J\,d\sigma) = 0.$$

Эта форма дифференціальныхъ уравненій есть въ данномъ случаѣ промежуточная между формой Киргоффа и формой Клебша и особенно удобна при примѣненіяхъ къ данному случаю теоріи Гамильтона-Якоби о приведеніи дифференціальныхъ уравненій динамики къ одному уравненію съ частными производными, что и выполнено мною для простѣйшаго случая этого движенія — случая Halphen'a (обобщеніе случая Киргоффа для тѣла вращенія).

Обращаясь къ детальному перечисленію содержанія настоящей работы, замѣчу, что I глава содержитъ основанія теоріи видоизмѣненія функціи Лагранжа, при чемъ я дѣлаю при этомъ слѣдующее *существенное замѣчаніе*: вся теорія видоизмѣненія остается въ силѣ и *въ томъ* случаѣ, если мы будемъ видоизмѣнять функцію Лагранжа не при помощи интеграловъ требуемаго теоріею видоизмѣненія *вида*, а при помощи *частныхъ рѣшеній*, имѣющихъ тотъ же видъ. На это обстоятельство повидимому никто еще не обратилъ вниманія, а между тѣмъ на его основаніи легко выводится (почти безъ вычисленія) теорія движенія $\perp$-ра къ круговымъ сѣченіямъ гираціоннаго эллипсоида въ случаѣ Гесса вращенія тяжелаго твердаго тѣла и его обобщеніяхъ [1]).

Въ главѣ II изложено примѣненіе теоріи о видоизмѣненіи Лагранжевской функціи къ случаю вращенія тяжелаго твердаго тѣла и вообще къ случаю, когда силы имѣютъ потенціалъ и допускаютъ законъ площадей въ нѣкоторой плоскости и слѣдствія полученныхъ результатовъ.

Въ главѣ III тѣ же результаты изложены въ другомъ болѣе сложномъ видѣ по пріему, указанному Минковскимъ.

Въ главѣ IV я останавливаюсь на случаяхъ преобразованія дифференціальныхъ уравненій при помощи ихъ частныхъ рѣшеній на самихъ дифференціальныхъ уравненіяхъ, позволяющихъ отъ задачи соотвѣтствующей частному рѣшенію дифференціальныхъ уравненій задачи механики (и слѣд. соотвѣтствующаго имъ вида начала Гамильтона) перейти къ частному рѣшенію соотв. другой задачѣ (и слѣд. другому виду начала Гамильтона). Здѣсь я останавливаюсь на подходящемъ подъ категорію такихъ рѣшеній случаѣ вращенія тяжелаго твердаго тѣла, указанномъ Д. К. Бобылевымъ и В. А. Стекловымъ, гдѣ задача приводится къ вращенію симметричнаго гироскопа.

Я останавливаюсь на этомъ случаѣ еще по тому обстоятельству, что случай гироскопа вращенія, къ которому здѣсь приводится задача, характеризующійся лишнимъ 5-мъ интеграломъ $\frac{q}{p} = const$ (сравнительно съ общимъ случаемъ движенія гироскопа) соотвѣтствуетъ вмѣстѣ съ тѣмъ

---

[1]) См. нашу статью въ журналѣ Харьков. Мат. Об. 1898 г. и въ „Messenger of Mathematics“ 1901 г.

интегрируемости въ логариѳмахъ нѣкотораго эллиптическаго дифференціала (а именно уголъ *э* выражается въ данномъ случаѣ въ *логариѳмахъ*). На это обстоятельство я уже имѣлъ случай обратить вниманіе [1]) и обращаю вниманіе въ главѣ VIII.

Глава V посвящена особому преобразованію дифференціальныхъ уравненій движенія тѣла аналогичному преобразованію Минковскаго причемъ формулы преобразованія я беру въ формѣ Якоби и примѣняю ихъ къ полученію квадратуръ С. А. Чаплыгина для случая вращенія около неподвижной точки тяжелаго тѣла въ случаѣ Д. Н. Горячева. Это примѣненіе одновременно напечатано мною въ Rendiconti del Circolo Mathematico di Palermo и въ Messenger of Mathematics. Здѣсь оказывается большое преимущество въ отсчитываніи угла *э* (3-го угла Эйлера) по способу указываемому въ механикѣ Д. К. Бобылева, такъ какъ иначе приходится вездѣ прибавлять $\frac{\pi}{2}$.

Глава VI посвящена выводу уравненій и теоремъ Минковскаго и тѣхъ слѣдствій отъ нихъ и видоизмѣненій ихъ (половинное преобразованіе), о которыхъ я упоминалъ выше. Замѣчу, что при этомъ весьма просто получается интересный результатъ С. А. Чаплыгина, что при существованіи линейнаго частнаго рѣшенія нѣкоторая ось неизмѣнно связанная съ тѣломъ, движется какъ будто бы она была осью симметріи. Результатъ этотъ получается видоизмѣненіемъ Лагранжевской функціи при помощи частныхъ рѣшеній о которыхъ упоминается въ I главѣ.

Въ VII и VIII главахъ изложено полное рѣшеніе въ эллиптическихъ функціяхъ одной задачи о вращеніи твердаго тѣла въ жидкости. Это есть частный случай задачи Клебша, когда живая сила выражается черезъ

$$2T = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + b_3 y_3^2.$$

причемъ коэффиціенты a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 связаны соотношеніемъ Клебша:

$$a_1\left(\frac{1}{b_2} - \frac{1}{b_3}\right) + a_2\left(\frac{1}{b_3} - \frac{1}{b_1}\right) + a_3\left(\frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_2}\right) = 0,$$

къ которому я присоединяю еще условіе, чтобы одна изъ дробей

$$\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \frac{1}{b_3}$$

равнялась *суммѣ* двухъ другихъ, напр.:

$$\frac{1}{b_3} = \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2}.$$

[1]) О нѣкоторыхъ частныхъ рѣшеніяхъ задачи о движеніи твердаго тѣла. Сборн. Ин. Инж. Путей Сообщенія 1899 г.

Въ этомъ случаѣ при $= 0$ нѣкоторой постоянной Γ, которая равна $\frac{b_2}{a_3-a_2}(La_3 - 2h - J^2(a_3^2 + a_1a_2))$, гдѣ L, $2h$, J^2 постоянныя интеграловъ: 4-го Клебша (L), живой силы ($2h$) и 1-го Киргоффа (J^2), задача допускаетъ дробный раціональный 5-ый интегралъ:

$$\frac{b_1x_1y_1 + b_2x_2y_2}{(a_3 - a_2)x_2^2 - b_1y_1^2} = const. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (*)$$

кромѣ 4-хъ извѣстныхъ и онъ позволяетъ привести задачу къ эллиптическимъ функціямъ. Интересъ настоящаго случая заключается въ способѣ нахожденія интеграла (*) (непосредственное нахожденіе его было бы весьма мѣшкотно); я принимаю за *новыя* перемѣнныя корни нѣкотораго уравненія 2-й степени s_1 и s_2, которые я получаю, разлагая на множители дискриминантъ нѣкотораго уравненія 2-й степени. Тогда корни эти оказываются удовлетворяющими дифференціальнымъ уравненіямъ:

$$\frac{ds_1}{\sqrt{s_1}\sqrt{(s_1-k_1)(s_1-k_2)}} \pm \frac{ds_2}{\sqrt{s_2}\sqrt{(s_2-k_1)(s_2-k_2)}} = 0$$

теоремы сложенія эллиптическихъ функцій. Такимъ уравненіямъ, какъ извѣстно, соотвѣтствуетъ алгебраическій интегралъ, составляя который послѣ нѣкоторыхъ упрощеній я получаю интегралъ (*).

При помощи этого интеграла я выражаю въ главѣ VIII въ эллиптическихъ функціяхъ косинусы всѣхъ угловъ, которые образуетъ неподвижная въ тѣлѣ система координатъ съ неподвижною системою въ пространствѣ и показываю, что разсматриваемое движеніе раскладывается на 2 движенія à la Poinsot аналогично теоремѣ Якоби для разложенія вращенія гироскопа. Существованіе 5-го интеграла и здѣсь какъ и въ главѣ IV приводитъ къ интегрированію въ логариѳмахъ нѣкотораго выраженія, которое въ общемъ случаѣ приводится къ высшимъ трансцендентнымъ.

Наконецъ въ главѣ IX указано преобразованіе аналогичное преобразованію главы V и примѣнено къ задачѣ о движеніи твердаго тѣла въ жидкости.

Въ заключеніе приношу мою глубокую благодарность Совѣту Императорскаго С.-Петербургскаго Университета, давшему мнѣ средства на напечатаніе этого сочиненія, а также Т. Э. Фризендорфу, много помогавшему мнѣ при просмотрѣ корректуръ.

Г. Колосовъ.

С.-Петербургъ
8 марта 1903 г.

О нѣкоторыхъ видоизмѣненіяхъ начала Гамильтона въ примѣненіи къ рѣшенію вопросовъ механики твердаго тѣла.

ГЛАВА I.

О видоизмѣненной функціи Лагранжа.

§ 1. Дифференціальныя уравненія Лагранжа въ координатныхъ параметрахъ $q_1, q_2 \dots q_n$ для системы связанной p связями вида

$$\varphi_i (q_1, q_2, q_3 \dots q_n) = 0 \qquad i = 1,2, \dots p \tag{1}$$

какъ извѣстно имѣютъ видъ:

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial (T + U)}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^{j=p} \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial q_i} \qquad i = 1,2, \dots n \tag{2}$$

гдѣ $p_i = \frac{\partial T}{\partial q_i'}$ и силы, дѣйствующія на систему предполагаются имѣющими нѣкоторой потенціалъ U.

Мы будемъ въ дальнѣйшемъ пользоваться видоизмѣненіемъ функціи Лагранжа, указаннымъ Routh'омъ [1]), а затѣмъ позднѣе и въ другой формѣ разработаннымъ въ трудахъ Helmholtz'а, Hertz'а и другихъ нѣмецкихъ ученыхъ [2]).

Предположимъ, что какой-нибудь изъ координатныхъ параметровъ q_k не входитъ въ выраженіе $T + U$ и ни въ одну изъ связей (1), связывающихъ систему.

Тогда уравненія (2) будутъ допускать очевидный интегралъ

$$p_k = const = l_k \tag{3}$$

Допустимъ, что такихъ параметровъ у насъ будетъ нѣсколько и слѣдовательно нѣсколько интеграловъ вида (3) и поставимъ себѣ задачею

[1]) A treatise on the stability of a given state of motion by E. J. Routh. London 1877. Ch. IV Art. 20; см. также его Rigid Dynamics vol. I.

[2]) См. примѣчаніе F. Klein къ нѣмецкому изданію механики Routh'а (переводъ A. Shepp).

при помощи ихъ исключить перемѣнныя q'_k соотвѣтствующія q_k изъ уравненій (1).

Результатомъ такого исключенія будутъ новыя уравненія вида (1), но, въ которыхъ вмѣсто $T+U$ стоитъ названная Routh'омъ *видоизмѣненной функціей Лагранжа* (the modified Lagrangian function) функція

$$T+U-\sum_k l_k q'_k \tag{4}$$

гдѣ Σ распространена на число всѣхъ интеграловъ (3), а вмѣсто q_k' въ (4) подставлены ихъ значенія изъ этихъ интеграловъ. Съ такого рода преобразованіями, но въ другой формѣ мы встрѣчаемся также въ «Natural Philosophy» Томсона и Тэта подъ именемъ теоріи «Ignoration of Coordinates».

Чтобы доказать правило Routh'а, мы замѣтимъ, что обозначивъ черезъ $[T+U]$ результатъ подстановки въ $T+U$ вмѣсто q'_k ихъ значенія изъ интеграловъ (3), мы найдемъ:

$$\frac{\partial\,[T+U]}{\partial q_s'}=\frac{\partial\,(T+U)}{\partial q_s'}+\sum_k\frac{\partial T}{\partial q_k'}\,\frac{\partial q_k'}{\partial q_s'}=\frac{\partial\,(T+U)}{\partial q_s'}+\sum_k l_k\,\frac{\partial q_k'}{\partial q_s'}$$

$$\frac{\partial\,[T+U]}{\partial q_s}=\frac{\partial\,(T+U)}{\partial q_s}+\sum_k\frac{\partial T}{\partial q_k'}\,\frac{\partial q_k'}{\partial q_s}=\frac{\partial\,(T+U)}{\partial q_s}+\sum_k l_k\,\frac{\partial q_k'}{\partial q_s}$$

и слѣдовательно

$$\frac{\partial\,(T+U)}{\partial q_s'}=\frac{\partial\,\{[T+U]-\sum\limits_k l_k q_k'\}}{\partial q_s'}$$

$$\frac{\partial\,(T+U)}{\partial q_s}=\frac{\partial\,\{[T+U]-\sum\limits_k l_k q_k'\}}{\partial q_s}$$

откуда и слѣдуетъ вышеуказанное правило.

Наиболѣе простой видъ принимаетъ правило Routh'а, если всѣ l_k равны 0. Тогда видоизмѣненная функція Лагранжа получается изъ $T+U$ простой подстановкой въ $T+U$ значеній q'_k изъ интеграловъ (3) безъ всякаго дополнительнаго члена. Этотъ результатъ получается и изъ теоріи «ignoration of coordinates» Thomson'а и Tait'а.

Замѣтимъ, что на преобразованіе Routh'а можно смотрѣть (какъ это дѣлаетъ и онъ самъ) какъ на приведеніе дифференціальныхъ уравненій (1) къ виду промежуточному между (1) и каноническимъ видомъ тѣхъ же дифференціальныхъ уравненій:

$$\frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}+\sum_{j=1}^{p}\lambda_j\,\frac{\partial\varphi_j}{\partial q_i}$$

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i}.$$

Очевидно, если мы перемѣнимъ на каноническія перемѣнныя только перемѣнныя q_k', оставляя остальныя перемѣнныя тѣми же, мы придемъ къ теоріи видоизмѣненной функціи Routh'а.

Наконецъ, къ преобразованію Routh'а можно придти, составляя уравненіе съ частными производными Якоби для функціи

$$V = \int_0^t (T + U)\, dt.$$

Оно будетъ въ данномъ случаѣ допускать рядъ $\int$-овъ: $\frac{\partial V}{\partial q_k} = const. = l_k$. Интегрированіе такого уравненія, какъ извѣстно можетъ быть упрощено черезъ введеніе новой перемѣнной W уравненіемъ:

$$V = W + \sum_k l_k q_k$$

и слѣдовательно новая функція W можетъ быть написана въ видѣ:

$$W = \int_0^t (T + U)\, dt - \sum_k l_k q_k = \int_0^t \left(T + U - \sum_k l_k q_k'\right) dt.$$

Интегрированіе уравненія съ частными производными въ W соотвѣтствуетъ поэтому условію

$$\delta \int_0^t (T + U - \Sigma l_k q'_k)\, dt = 0,$$

т. е. дифференціальнымъ уравненіямъ, соотвѣтствующимъ видоизмѣненной функціи Лагранжа, къ которымъ такимъ образомъ приводится $\int$-іе нашихъ дифференціальныхъ уравненій.

Мы сдѣлаемъ теперь слѣдующее важное для насъ въ дальнѣйшемъ *замѣчаніе.*

Изъ предыдущей теоріи, какъ мы уже замѣтили, слѣдуетъ что, если всѣ $l_k = 0$, видоизмѣненная функція совпадаетъ съ самой функціей Лагранжа $T + U$, т. е. дифференціальныя уравненія (1) приводятся тогда къ меньшему числу уравненій такого же вида, какъ и (1), получаемыхъ изъ этой системы, если въ $T + U$ вмѣсто q_k' подставить ихъ значенія изъ интеграловъ $p_k = l_k = 0$.

Тоже самое заключеніе мы можемъ сдѣлать и въ томъ случаѣ, если $p_k = 0$ не будутъ частными значеніями интеграловъ $p_k = l_k$, которыхъ наши уравненія въ этомъ случаѣ не допускаютъ, а будутъ просто *частными рѣшеніями* этихъ уравненій.

Въ самомъ дѣлѣ, если уравненія (1) допускаютъ рѣшеніе

$$\frac{\partial T}{\partial q_k'} = p_k = 0, \tag{5}$$

то, исключивъ при помощи этихъ уравненій изъ $T'+U$ q_k' мы найдемъ:

$$\frac{\partial\,[T+U]}{\partial q'_i}=\frac{\partial\,(T+U)}{\partial q_i'}$$

$$\frac{\partial\,[T+U]}{\partial q_i}=\frac{\partial\,(T+U)}{\partial q_i}$$

и уравненія примутъ видъ:

$$\frac{dp_i}{dt}=\frac{\partial\,[T+U]}{\partial q_i}+\sum_{j=1}^{j=p}\lambda_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial q_i}$$

и соотвѣтствуютъ началу Гамильтона:

$$\delta\int_0^t (T+U)\,dt=0,$$

въ которомъ въ $T+U$ перемѣнная q'_k исключена при помощи частнаго рѣшенія (5).

§ 2. Мы разсмотримъ нѣсколько примѣровъ видоизмѣненія Лагранжевской функціи въ случаѣ, если $l_k=0$.

Разсмотримъ вращеніе около неподвижной точки обыкновеннаго гироскопа, т. е. тѣла, масса котораго распредѣлена симметрично относительно нѣкоторой оси проходящей черезъ неподвижную точку. Положеніе твердаго тѣла въ пространствѣ мы будемъ опредѣлять тремя Эйлеровыми углами *ж*, *ф*, *э* [1]).

Пусть A, $B=A$, C будутъ моменты инерціи твердаго тѣла относительно главныхъ его осей инерціи въ неподвижной точкѣ; p, q, r—проэкціи на эти оси его угловой скорости. Функція Лагранжа будетъ имѣть видъ $\frac{1}{2}\{A(p^2+q^2)+Cr^2\}+U$ [2]); дифференціальныя уравненія движенія будутъ допускать $\int$-лъ

$$\frac{\partial T}{\partial э'}=Cr=l.$$

Пусть $l=0$; мы можемъ тогда видоизмѣнить функцію Лагранжа для этого случаѣ непосредственно подставивъ въ нее $r=0$, мы найдемъ функцію

$$\frac{1}{2}A(p^2+q^2)+U \text{ или } \frac{1}{2}A\{ж'^2 \sin^2 ф + ф'^2\}+U$$

---

[1]) См. Курсъ Анал. Мех. проф. Д. К. Бобылева.

[2]) Здѣсь U потенціалъ силы тяжести $= Mg\cos ф$ (ось z-овъ направлена вертикально внизъ).

и соотвѣтствующія дифференціальныя уравненія мы получимъ изъ уравненія:

$$\delta \int_0 \left[\frac{1}{2} A (ж'^2 \sin^2 \phi + \phi'^2) + U \right] dt = 0.$$

Но это уравненіе соотвѣтствуетъ движенію матеріальной точки по поверхности сферы и слѣдовательно движеніе оси Z совершается здѣсь по законамъ коническаго маятника; наши дифференціальныя уравненія допускаютъ еще законъ площадей въ плоскости xy-овъ, соотвѣтствующій интегралу ихъ:

$$\frac{\partial T}{\partial ж'} = l_1 \text{ или } ж' \sin^2 \phi = l_1.$$

Если и эту постоянную положить $= 0$, мы придемъ къ Лагранжевской функціи, соотвѣтствующей началу:

$$\delta \int_0^t \left(\frac{1}{2} A\phi'^2 + U \right) dt = 0,$$

которое совпадаетъ съ началомъ Гамильтона для простого маятника и, слѣдовательно задача сводится здѣсь къ качаніямъ обыкновеннаго маятника.

Въ особенности полезно при приложеніи теоріи видоизмѣненія Лагранжевской функціи къ примѣрамъ замѣчаніе, сдѣланное нами въ концѣ предыдущаго §, а именно, что теорія видоизмѣненія для $l_k = 0$ остается въ томъ случаѣ, если $p_k = 0$ просто частныя рѣшенія нашихъ дифференціальныхъ уравненій. Покажемъ, что прямымъ слѣдствіемъ этого замѣчанія является теорія случая Гесса вращенія тяжелаго твердаго тѣла съ его обобщеніями [1]).

Дифференціальныя уравненія вращенія твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки (или вокругъ центра инерціи, если дѣло идетъ объ обобщеніяхъ случая Гесса) могутъ быть написаны въ видѣ:

$$A \frac{dp}{dt} = (B - C)\, qr + \Lambda\xi$$

$$B \frac{dq}{dt} = (C - A)\, rp + \Lambda\eta$$

$$C \frac{dr}{dt} = (A - B)\, pq + \Lambda\zeta,$$

гдѣ $\Lambda\xi$, $\Lambda\eta$, $\Lambda\zeta$ моменты силъ и реакцій связей относительно осей Ξ, Y, Z неизмѣнно связанныхъ съ твердымъ тѣломъ.

---

[1]) См. Г. Колосовъ. Объ одномъ случаѣ движенія твердаго тѣла опирающагося остріемъ на гладкую плоскость. (Труды Императорскаго Московскаго О. Л. Е. 1898 г.).
Г. Колосовъ. Объ одномъ случаѣ движенія твердаго тѣла (Ж. Харьк. М. О. 1898 г.).
G. Kolossoff. On a case on motion ot rigid body. Messenger of Math. 1901.

Обозначимъ черезъ α, β, γ косинусы угловъ, образованныхъ съ осями инерціи $\perp$-омъ къ круговымъ сѣченіямъ гираціоннаго эллипсоида тѣла (въ неподвижной точкѣ или центрѣ инерціи), т. е. величины, удовлетворяющія уравненіямъ:

$$\beta = 0, \quad \alpha^2 + \gamma^2 = 1, \quad A\alpha^2 (B - C) = C\gamma^2 (A - B).$$

Предположимъ, что моментъ силъ приложенныхъ къ тѣлу $= 0$ вокругъ этого $\perp$-ра, т. е. $\Lambda\xi\, \alpha + \Lambda\zeta\, \gamma = 0$.

Тогда дифференціальныя уравненія движенія допускаютъ частное рѣшеніе

$$A\alpha p + C\gamma r = 0, \tag{9}$$

выражающее, что главный моментъ количествъ движенія тѣла вокругъ $\perp$-ра къ круговымъ сѣченіямъ гираціоннаго эллипсоида $= 0$.

Примемъ за новую ось Z неизмѣнно связанную съ тѣломъ этотъ $\perp$-ръ, а двѣ другія оси направимъ въ плоскости къ нему $\perp$-ой, т. е. въ плоскости круговыхъ сѣченій гираціоннаго эллипсоида [1]); тогда частное рѣшеніе (9) приметъ видъ:

$$\frac{\partial T}{\partial \vartheta'} = 0. \tag{10}$$

(ϑ есть 3-й Эйлеровъ уголъ, соотвѣтствующій новой системѣ осей). Мы имѣемъ какъ разъ условія примѣненія теоріи конца предыдущаго § и слѣдовательно мы можемъ ϑ' при помощи частнаго рѣшенія (10) непосредственно исключить изъ подъинтегральной функціи начала Гамильтона. Но живая сила тѣла при помощи интеграла (9) легко приводится къ виду:

$$\frac{1}{2} B \left[P^2 + Q^2\right],$$

гдѣ P и Q проэкціи угловой скорости на новыя оси (неизмѣнно связанныя съ тѣломъ), а B моментъ инерціи около новой оси Y (совпадающей со старою).

Поэтому начало Гамильтона можно здѣсь видоизмѣнить къ виду (предполагая, что силы имѣютъ потенціалъ U):

$$\delta \int_0^t \left\{ \frac{1}{2} B (P^2 + Q^2) + U \right\} dt = 0,$$

т. е. слѣдовательно предположить что вся масса тѣла сосредоточена на новой оси Z (причемъ моментъ инерціи массы вокругъ $\perp$-ра Y къ этой оси $= B$). Какъ извѣстно, это доказывается и непосредственнымъ преобразованіемъ координатъ.

Тотъ же результатъ легко выводится изъ уравненія съ частными производными Якоби, соотвѣтствующаго разсматриваемой задачѣ причемъ легко вывести и сами условія существованія случая Гесса. Въ са-

---

[1]) Ось Y при этомъ мы не мѣняемъ.

момъ дѣлѣ, положимъ дѣло идетъ о самомъ случаѣ Гесса (а не о его обобщеніяхъ); обозначимъ моменты количествъ движенія тѣла вокругъ осей $O\Xi$, OY, OZ черезъ $У_1$, $У_2$, $У_3$ [1]); мы найдемъ

$$2T = \frac{У_1^2}{A} + \frac{У_2^2}{B} + \frac{У_3^2}{C},$$

а уравненіе съ частными производными, подлежащее интегрированію будетъ

$$T - U = h,$$

куда подставлено $\frac{\partial V}{\partial ф}$ вмѣсто $p_ф$, $\frac{\partial V}{\partial э}$ вмѣсто $p_э$, $\frac{\partial V}{\partial ж}$ вмѣсто $p_ж$. Поворотимъ оси, неизмѣнно связанныя съ тѣломъ, на нѣкоторый уголъ вокругъ оси Y и обозначимъ новые $У_1$, $У_2$, $У_3$ черезъ $\overline{У}_1$, $\overline{У}_2$, $\overline{У}_3$; имѣемъ:

$$У_1 = \overline{У}_1\gamma + \overline{У}_3\alpha$$

$$У_2 = \overline{У}_2$$

$$У_3 = \overline{У}_3\gamma - \overline{У}_1\alpha.$$

Чтобы уравненіе съ частными производными въ новыхъ Эйлеровыхъ углахъ допускало частное рѣшеніе

$$p_э = \frac{\partial V}{\partial э} = 0 \quad \text{или} \quad \overline{У}_3 = 0$$

необходимо и достаточно, чтобы положивъ $\overline{У}_3 = 0$ мы исключили бы заразъ изъ уравненія и уголъ $э$.

Но при $\overline{У}_3 = 0$

$$2T = \overline{У}_1^2\left(\frac{\gamma^2}{A} + \frac{\alpha^2}{C}\right) + \frac{\overline{У}_2^2}{B}.$$

Чтобы это уравненіе не содержало $э$ необходимо и достаточно положить:

$$\frac{\gamma^2}{A} + \frac{\alpha^2}{C} = \frac{1}{B}$$

и тогда $2T$ приметъ видъ

$$\frac{1}{B}[\overline{У}_1^2 + \overline{У}_2^2],$$

изъ котораго прямо слѣдуютъ всѣ предыдущіе результаты.

Если взять за начало координатъ, неизмѣнно связанныхъ съ тѣломъ, его центръ инерціи, предыдущій выводъ можно распространить на обобщенія случая Гесса.

---

[1]) Выраженія $У_1$, $У_2$, $У_3$ черезъ $\frac{\partial T}{\partial ф'} = p_ф$, $\frac{\partial T}{\partial э'} = p_э$, $\frac{\partial T}{\partial ж'} = p_ж$ приведены ниже на стр. 15.

ГЛАВА II.

Примѣненіе теоріи видоизмѣненной функціи Лагранжа къ одному весьма общему случаю движенія твердаго тѣла.

§ 1. Мы будемъ, какъ въ § 2 предыдущей главы, опредѣлять положеніе твердаго тѣла въ пространствѣ координатами $x_ю$, $y_ю$, $z_ю$ неизмѣнно съ нимъ связанной точки $Ю$ по отношенію къ 3-мъ неподвижнымъ въ пространствѣ осямъ координатъ Ox, Oy, Oz и 3-мя Эйлеровыми углами $ф$, $ж$, $э$.

Силы, приложенныя къ твердому тѣлу, мы будемъ предполагать имѣющими потенціалъ $U = f(x_ю, y_ю, z_ю, ф, ж, э)$, а движеніе тѣла, вообще говоря, стѣсненнымъ $p\,(<6)$ связями, не заключающими времени явнымъ образомъ, вида:

$$\varphi_i\,(x_ю,\ y_ю,\ z_ю,\ ф,\ ж,\ э) = 0 \quad i = 1,2,\ldots p.$$

Шесть дифференціальныхъ уравненій движенія твердаго тѣла могутъ быть представлены въ видѣ:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\,\dfrac{\partial T}{\partial ж'}}{dt} &= \frac{\partial\,(T+U)}{\partial ж} + \sum_{i=1}^{i=p} \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial ж} \\
\frac{d\,\dfrac{\partial T}{\partial x_ю'}}{dt} &= \frac{\partial\,(T+U)}{\partial x_ю} + \sum_{i=1}^{i=p} \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_ю} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

гдѣ T живая сила тѣла.

Мы будемъ въ дальнѣйшемъ заниматься вращательнымъ движеніемъ твердаго тѣла и предположимъ сначала, что оно имѣетъ неподвижную точку, которую мы примемъ за $Ю$. Мы легко обобщимъ найденные результаты и на общій случай движенія твердаго тѣла, если предположимъ, что за $Ю$ принятъ его центръ инерціи.

Принявъ за оси, неизмѣнно связанныя съ тѣломъ, три его главныя оси инерціи въ $Ю$ и, обозначивъ черезъ p, q, r проэкціи угловой скорости тѣла на эти оси, а черезъ A, B, C моменты инерціи тѣла вокругъ ихъ, мы найдемъ:

$$2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 =$$

$$= (A\sin^2 ф\cos^2 э + B\sin^2 ф\sin^2 э + C\cos^2 ф)\,ж'^2 + (A\sin^2 э + B\cos^2 э)\,ф'^2 +$$

$$+ Cэ'^2 + 2ж'ф'\,(B - A)\sin ф\sin э\cos э + 2Cж'э'\cos ф. \qquad (2)$$

Мы сдѣлаемъ еще слѣдующее предположеніе насчетъ силъ, приложенныхъ къ тѣлу, и реакцій связей, стѣсняющихъ его движеніе: мы предположимъ, что моменты ихъ остаются все время $= 0$ вокругъ нѣкоторой

оси неподвижной въ пространствѣ, которую мы примемъ за неподвижную ось z-овъ. Тогда дифференціальныя уравненія (1) допускаютъ $\int$-лъ площадей въ плоскости $\perp$-ой къ оси z-овъ:

$$\frac{\partial T}{\partial ж'} = ж' (A \sin^2 ф \cos^2 э + B \sin^2 ф \sin^2 э + C \cos^2 ф) +$$
$$+ ф' (B - A) \sin ф \sin э \cos э + C э' \cos ф = const = l \qquad (3)$$

и, слѣдовательно, мы можемъ примѣнить въ данномъ случаѣ теорію видоизмѣненія функціи Лагранжа.

Предварительно замѣтимъ, что уравненіе съ частными производными Якоби, къ которому приводится задача о вращеніи тѣла получается, введя въ T вмѣсто $э'$, $ф'$, $ж'$ новыя перемѣнныя $p_э$, $p_ф$, $p_ж$.

Мы имѣемъ [1])

$$\left.\begin{aligned} p_э &= Cr \\ p_ж &= -Ap \sin ф \cos э + Bq \sin ф \sin э + Cr \cos ф \\ p_ф &= Ap \sin э + Bq \cos э \end{aligned}\right\}, \qquad (4)$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} Ap &= p_ф \sin э - \frac{\cos э \, (p_ж - p_э \cos ф)}{\sin ф} \\ Bq &= \frac{(p_ж - p_э \cos ф) \sin э}{\sin ф} + p_ф \cos э \\ Cr &= p_э \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

и слѣдовательно

$$2T = \frac{1}{C} p^2_э + \frac{1}{B}\left(p_ф \cos э + \frac{(p_ж - p_э \cos ф) \sin э}{\sin ф}\right)^2 +$$
$$+ \frac{1}{A}\left(p_ф \sin э - \frac{(p_ж - p_э \cos ф) \cos э}{\sin ф}\right)^2. \qquad (6)$$

Если, кромѣ неподвижности точки $Ю$, другими связями движеніе тѣла не стѣснено, мы найдемъ уравненіе съ частными производными, къ которому приводится интегрированіе дифференціальныхъ уравненій нашей задачи въ видѣ:

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{C}\left(\frac{\partial V}{\partial э}\right)^2 + \frac{1}{B}\left(\frac{\partial V}{\partial ф} \cos э + \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial ж} - \frac{\partial V}{\partial э} \cos ф\right) \sin э}{\sin ф}\right)^2 +\right.$$
$$\left. + \frac{1}{A}\left(\frac{\partial V}{\partial ф} \sin э - \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial ж} - \frac{\partial V}{\partial э} \cos ф\right) \cos э}{\sin ф}\right)^2\right\} = U + h. \qquad (7)$$

[1]) Если за оси неизмѣнно связанныя съ тѣломъ взяты не главныя его оси инерціи, а какія угодно прямоуг. оси, соотвѣтствующія формулы получатся, если вмѣсто Ap поставить $\frac{\partial T}{\partial p}$, вмѣсто Bq $\frac{\partial T}{\partial q}$, вмѣсто Cr $\frac{\partial T}{\partial r}$.

Примѣнимъ теперь къ разсматриваемому случаю теорію видоизмѣненія Лагранжевской функціи.

Видоизмѣнимъ эту функцію при помощи интеграла (3). Мы найдемъ

$$T + U - l\,\frac{dж}{dt}$$

и слѣдовательно, если мы исключимъ изъ дифференціальныхъ уравненій движенія $ж'$ при помощи интеграла (3), мы найдемъ дифференціальныя уравненія, соотвѣтствующія задачѣ:

$$\delta\int_0^t \left(T + U - l\,\frac{dж}{dt}\right) dt = 0, \qquad (8)$$

гдѣ $\frac{dж}{dt}$ должно быть исключено изъ подъинтегральной функціи при помощи интеграла (3), т. е. при помощи уравненія

$$\frac{dж}{dt} = \frac{l - э' C \cos ф - ф' (B - A) \sin ф \sin э \cos э}{A \sin^2 ф \cos^2 э + B \sin^2 ф \sin^2 э + C \cos^2 ф}. \qquad (9)$$

Замѣтимъ, что дифференціальныя уравненія движенія, обращая въ 0 первую варіацію отъ

$$\int_0^t \left(T + U - l\,\frac{dж}{dt}\right) dt, \qquad (10)$$

соотвѣтствуютъ minimum'у этого интеграла.

Мы будемъ называть этотъ интегралъ «видоизмѣненнымъ дѣйствіемъ по Гамильтону», слѣдуя примѣру проф. Д. К. Бобылева [1]) по отношенію къ обыкновенному дѣйствію $\int_0^t (T + U)\, dt$.

Введя въ выраженіе (8) вмѣсто T и $\frac{dж}{dt}$ ихъ выраженія (2) и (9), мы найдемъ его въ видѣ:

$$\delta\int_0^t \left\{\frac{1}{2}\,\frac{l^2 + Nф'^2 + Mэ'^2 + 2C(A-B)\, э'ф' \sin ф \cos ф \sin э \cos э}{A \sin^2 ф \cos^2 э + B \sin^2 ф \sin^2 э + C \cos^2 ф} + U - l\,\frac{dж}{dt}\right\} dt = 0,$$

гдѣ
$$N = BC \cos^2 ф \cos^2 э + AC \sin^2 э \cos^2 ф + AB \sin^2 ф$$
$$M = AC \sin^2 ф \cos^2 э + BC \sin^2 ф \sin^2 э.$$

---

[1]) О началѣ Гамильтона или Остроградскаго и о началѣ наименьшаго дѣйствія Лагранжа. Д. Бобылевъ. Приложеніе къ LXI тому записокъ Имп. Академіи Наукъ, № 5.

или

$$\delta\int_0^t\left\{\frac{1}{2}\frac{\varphi'^2(BC\cos^2\varphi\cos^2\vartheta+AC\sin^2\vartheta\cos^2\varphi+AB\sin^2\varphi)}{A\sin^2\varphi\cos^2\vartheta+B\sin^2\varphi\sin^2\vartheta+C\cos^2\varphi}+\right.$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\vartheta'^2C(A\sin^2\varphi\cos^2\vartheta+B\sin^2\varphi\sin^2\vartheta)+2C(A-B)\vartheta'\varphi'\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\varphi\cos\varphi}{A\sin^2\varphi\cos^2\vartheta+B\sin^2\varphi\sin^2\vartheta+C\cos^2\varphi}+$$

$$\left.+\frac{-\frac{l^2}{2}+l(\vartheta'C\cos\varphi+\varphi'(B-A)\sin\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta)}{A\sin^2\varphi\cos^2\vartheta+B\sin^2\varphi\sin^2\vartheta+C\cos^2\varphi}+U\right\}dt=0. \qquad (10\text{ bis})$$

Чтобы убѣдиться, что мы имѣемъ здѣсь minimum, мы примѣнимъ такъ называемое Лежандровское условіе существованія maximum'a или minimum'a, въ той формѣ, которую далъ ему Клебшъ и въ которой оно встрѣчается у позднѣйшихъ изслѣдователей 2-ой варіаціи (Шеффера и другихъ) и которая состоитъ въ томъ, что для того, чтобы

$$J=\int_a^b F(x,\ y,\ z,\ y',\ z')\,dx,\ \text{гдѣ}\ y'=\frac{dy}{dx},\ z'=\frac{dz}{dx}$$

для y и z удовлетворяющихъ условію

$$\delta J=0 \qquad (11)$$

было minimum'омъ или maximum'омъ достаточно (но не необходимо), чтобы для всѣхъ точекъ кривой удовлетворяющей условію (11) было:

$$\frac{\partial^2F}{\partial p^2}\,\frac{\partial^2F}{\partial q^2}-\left(\frac{\partial^2F}{\partial p\,\partial q}\right)^2>0,$$

гдѣ

$$p=y',\ q=z',\ F(x,\ y,\ z,\ p,\ q)=F\left(x,\ y,\ z,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{dz}{dx}\right).$$

Если при этомъ

$$\frac{\partial^2F}{\partial p^2}>0 \text{ мы имѣемъ minimum,}$$

а, если

$$\frac{\partial^2F}{\partial p^2}<0 \text{ мы имѣемъ maximum.}$$

Если эти условія выполнены для всевозможныхъ значеній p и q мы имѣемъ дѣло съ такъ называемымъ «сильнымъ» (starkes) [1]) minimum'омъ или maximum'омъ [2]). Примѣняя этотъ признакъ къ нашему случаю мы

[1]) Терминъ A. Kneser'a. Lehrbuch der Variationsrechnung, § 54.

[2]) Весьма простой выводъ Лежандровскаго условія для 2-хъ перемѣнныхъ и геометрическая его интерпретація приведены въ Inaugural Dissertation von Nadeschda Gernet. Göttingen, 1902. См. также: проф. В. П. Ермаковъ. Варіаціонное исчисленіе по Вейерштрассу. Кіевъ, 1903 г.

легко убѣдимся, что выполнены условія существованія сильнаго minimum'a. Въ самомъ дѣлѣ:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q}\right)^2 = \frac{NM - L^2}{S^2},$$

гдѣ

$$N = BC \cos^2 ф \cos^2 э + AC \sin^2 э \cos^2 ф + AB \sin^2 ф$$

$$M = AC \sin^2 ф \cos^2 э + BC \sin^2 ф \sin^2 э$$

$$L = C(A - B) \sin э \cos э \sin ф \cos ф$$

$$S = A \sin^2 ф \cos^2 э + B \sin^2 ф \sin^2 э + C \cos^2 ф$$

или

$$\frac{ABC^2 \sin^2 ф \cos^2 ф + A^2BC \sin^4 ф \cos^2 э + AB^2C \sin^4 ф \sin^2 э}{(A \sin^2 ф \cos^2 э + B \sin^2 ф \sin^2 э + C \cos^2 ф)^2} =$$

$$= \frac{ABC \sin^2 ф}{A \sin^2 ф \cos^2 э + B \sin^2 ф \sin^2 э + C \cos^2 ф} > 0$$

для всякихъ $ф$ и $э$;

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p^2} = \frac{BC \cos^2 ф \cos^2 э + AC \sin^2 э \cos^2 ф + AB \sin^2 ф}{A \sin^2 ф \cos^2 э + B \sin^2 ф \sin^2 э + C \cos^2 ф} > 0$$

для всякихъ $ф$ и $э$.

Такимъ образомъ видоизмѣненное дѣйствіе по Гамильтону оказывается всегда minimum'омъ.

Само собою разумѣется, что при этомъ должно быть соблюдено еще основное условіе (Якоби), чтобы тѣло въ крайній промежутокъ времени (t) не дошло или не перешло за кинетическій фокусъ взаимной начальной конфигураціи. Для этого какъ извѣстно опредѣлитель

$$\Delta(o, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \frac{\partial \psi}{\partial \beta} - \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha},$$

составленный изъ величинъ

$$ф = \varphi(t, \alpha, \beta)$$

$$э = \psi(t, \alpha, \beta),$$

представляющихъ систему интеграловъ нашихъ дифференціальныхъ уравненій, соотвѣтствующую одному и тому же начальному значенію угловъ $ф$ и $э$ [1]), не долженъ равняться нулю въ теченіе разсматриваемаго промежутка времени.

Мы будемъ разсматривать видоизмѣненное дѣйствіе еще въ другой формѣ, аналогичной Лагранжевой формѣ начала наименьшаго дѣйствія, которое мы будемъ называть по аналогіи съ терминомъ проф. Д. К. Бобылева «видоизмѣненнымъ дѣйствіемъ по Лагранжу».

[1]) N. Gernet l. c.; въ нѣсколько иномъ видѣ это условіе см. Д. К. Бобылевъ l. c.

Обыкновенно [1]) устанавливаютъ понятіе о наименьшемъ дѣйствіи по Лагранжу для тѣхъ задачъ механики, которыя соотвѣтствуютъ началу Гамильтона

$$\delta\int_0^t (T+U)\,dt=0,$$

въ которомъ: 1) время t *не* входитъ явнымъ образомъ ни въ T, ни въ U, 2) T представляетъ однородную функцію производныхъ q_1, q_2, q_3... отъ координатныхъ параметровъ. Въ такомъ случаѣ дифференціальныя уравненія движенія допускаютъ интегралъ живыхъ силъ:

$$T-U=h, \tag{12}$$

при помощи котораго и преобразовывается начало Гамильтона, которое принимаетъ видъ

$$\delta\int_0^t 2T\,dt=0,$$

причемъ, какъ обратилъ вниманіе еще Якоби, время t должно быть отсюда исключено при помощи (12), такъ что, положивъ $T=q_1'^2.G$, найдемъ это начало въ видѣ

$$\delta\int_{q_{0,1}}^{q_{1,1}} F\,dq_1=0, \tag{13}$$

гдѣ

$$F=2\sqrt{U+h}\,\sqrt{G}.$$

Тогда получающіяся отъ варіированія интеграла (13) уравненія

$$\frac{d\,\frac{\partial F}{\partial g_i}}{dq_1}=\frac{\partial F}{\partial q_i},\quad \text{гдѣ}\quad g_i=\frac{dq_i}{dq_1},$$

какъ извѣстно совпадаютъ съ дифференціальными уравненіями, выводимыми изъ начала Гамильтона.

Мы распространимъ теперь это начало на случай, когда: 1) t не входитъ явно ни въ T, ни въ U, но 2) T не представляется однородной функціей отъ производныхъ отъ координатныхъ параметровъ q_i', а представляетъ сумму 3-хъ функцій

$$T=T_0+T_1+T_2,$$

изъ которыхъ T_0 не содержитъ совершенно производныхъ отъ координатныхъ параметровъ, T_1 — однородная функція 1-ой степени отъ нихъ:

[1]) C. Jacobi. Vorles. üb. D., Д. К Бобылевъ l. c.

$T_1 = \sum_i A_i q_i'$, а T_2 — однородная функція второй степени отъ этихъ производныхъ.

Начало Гамильтона представится здѣсь въ видѣ:

$$\delta \int_0^t (T_2 + T_1 + T_0 + U)\, dt = 0$$

или положивъ $T_0 + U = U_0$

$$\delta \int_0^t (T_2 + T_1 + U_0)\, dt = 0. \tag{14}$$

Этому началу соотвѣтствуетъ интегралъ

$$T_2 - U_0 = h \tag{15}$$

аналогичный интегралу живыхъ силъ и при его помощи мы можемъ преобразовать подъинтегральное выраженіе, какъ и въ предыдущемъ случаѣ.

Пусть

$$T_2 = q_1'^2\, G, \quad T_1 = \Sigma A_i\, q_i'.$$

Вводя въ (14) T_2 изъ уравненія (15) и полагая $\delta h = 0$, мы приведемъ уравненіе (14) къ виду:

$$\delta \int_0^t (2T_2 + T_1)\, dt = 0$$

или, исключая отсюда t при помощи (15)

$$\delta \int_{q_{0,1}}^{q_{1,1}} (2\sqrt{U_0 + h}\ \sqrt{G} + \Phi)\, dq_1 = 0,$$

$$\text{гдѣ } \Phi = A_1 + \sum_{j=2,3\ldots} A_j \frac{dq_j}{dq_1} = A_1 + \sum_{j=2,3\ldots} A_j g_j, \quad \text{гдѣ } g_j = \frac{dq_j}{dq_1}.$$

Чтобы доказать, что изъ этого начала мы получимъ тѣ же диффеенрціальныя уравненія, что изъ (14) мы замѣтимъ, что совершенно тѣмъ же путемъ, какимъ мы убѣждаемся въ справедливости (13) на случай T однороднаго [1]) 2-й степени мы убѣдимся, что

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_2}{\partial q_i'} = \sqrt{\frac{U_0 + h}{G}}\ \frac{d}{dq_1}\left(\sqrt{\frac{U_0 + h}{G}}\ \frac{\partial G}{\partial g_i}\right)$$

$$\frac{\partial T_2}{dq_i} = \frac{U_0 + h}{G}\ \frac{\partial G}{\partial q_i}$$

[1]) См. напр. Г. К. Сусловъ. Анал. Мех. стр. 417—418, § 199.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_1}{\partial q_i'} = \frac{d}{dt}A_i = \sqrt{\frac{U_0+h}{G}}\frac{dA_i}{dq_1} = \sqrt{\frac{U_0+h}{G}}\frac{d\frac{\partial \Phi}{\partial q_i}}{dq_1}$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial q_i} = \sum_j \frac{\partial A_j}{\partial q_i} q_j' = q_1' \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} = \sqrt{\frac{U_0+h}{G}}\frac{\partial \Phi}{\partial q_i}.$$

Поэтому уравненія:

$$\frac{d\frac{\partial (T_2+T_1+U_0)}{\partial q_i'}}{dt} = \frac{\partial (T_2+T_1+U_0)}{\partial q_i} \qquad i = 1,2 \dots n,$$

слѣдующія изъ начала (14) преобразуются въ уравненія:

$$\frac{d}{dq_1}\left(\sqrt{\frac{U_0+h}{G}}\frac{\partial G}{\partial g_i}\right) + \frac{d}{dq_1}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial g_i}\right) = \sqrt{\frac{U_0+h}{G}}\frac{\partial G}{\partial q_i} +$$

$$+ \sqrt{\frac{G}{U_0+h}}\frac{\partial U_0}{\partial q_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \qquad i = 2,3,\dots n$$

очевидно отвѣчающія выраженію

$$\delta\int\limits_{q_{0,1}}^{q_{1,1}}\left\{2\sqrt{G(U_0+h)} + \Phi\right\} dq_1 = 0.$$

Примѣнимъ эти разсужденія къ нашему случаю, т. е. уравненію (10 bis)· Мы найдемъ

$$\delta\int\limits_{\phi_0}^{\phi_1}\left\{2\sqrt{\frac{M\left(\frac{d\vartheta}{d\phi}\right)^2 + 2L\frac{d\vartheta}{d\phi} + N}{A\sin^2\phi\cos^2\vartheta + B\sin^2\phi\sin^2\vartheta + C\cos^2\phi}}\sqrt{U_0+h} + \right.$$

$$\left. + l\,\frac{\frac{d\vartheta}{d\phi}C\cos\phi + (B-A)\sin\phi\sin\vartheta\cos\vartheta}{A\sin^2\phi\cos^2\vartheta + B\sin^2\phi\sin^2\vartheta + C\cos^2\phi}\right\} d\phi = 0.$$

гдѣ L, M, N величины, приведенныя на стр. 18.

Составляя Лежандровское условіе [1] $\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}$ = (положит. множитель) $\times$ $\times$ $\{(BC\cos^2\phi\cos^2\vartheta + AC\sin^2\vartheta\cos^2\phi + AB\sin^2\phi)\,(AC\sin^2\phi\cos^2\vartheta +$ $+ BC\sin^2\phi\sin^2\vartheta) - C^2(A-B)^2\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta\sin^2\phi\cos^2\phi\}$ мы найдемъ, какъ мы видѣли на стр. 18, $\frac{\partial^2 F}{\partial p^2} > 0$.

---

[1]) A. Kneser. Variationsrechnung Seite 60: если $\delta\int F(p, y, x)\,dx = 0$, гдѣ $p = \frac{dy}{dx}$, Лежандровское условіе minimum'а $\frac{\partial^2 T}{\partial p^2}$ всегда $>$ 0.

Такъ какъ, если

$$F(p) = \sqrt{l + p^2 m + 2np},$$

то

$$\frac{\partial F'}{\partial p} = \frac{pm + n}{\sqrt{l + p^2 m + 2np}},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p^2} = \frac{(l + p^2 m + 2np)\, m - (pm + n)^2}{(l + p^2 m + 2np)^{3/2}} = \frac{lm - n^2}{(l + p^2 m + 2np)^{3/2}}.$$

Такимъ образомъ и здѣсь выполнено условіе сильнаго (starkes) minimum'a, но само собою разумѣется, что этотъ minimum распространяется какъ и въ первомъ случаѣ до ближайшаго лишь кинетическаго фокуса взаимнаго съ начальною конфигураціею тѣла.

Возвращаясь теперь къ дальнѣйшему изслѣдованію начала (10) введемъ вмѣсто $э$ и $ф$ новыя перемѣнныя, положивъ

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{A}} \lambda_s{}^{1)} = -\frac{1}{\sqrt{A}} \sin ф \cos э \\ y &= \frac{1}{\sqrt{B}} \mu_s = \frac{1}{\sqrt{B}} \sin ф \sin э \\ z &= \frac{1}{\sqrt{C}} \nu_s = \frac{1}{\sqrt{C}} \cos ф \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\frac{1}{\sqrt{A}} \cos ф \cos э ф' + \frac{1}{\sqrt{A}} \sin ф \sin э\, э' \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{1}{\sqrt{B}} \sin э \cos ф ф' + \frac{1}{\sqrt{B}} \sin ф \cos э\, э' \\ \frac{dz}{dt} &= -\frac{1}{\sqrt{C}} \sin ф\, ф'. \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Поэтому

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1. \qquad (18)$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \frac{1}{ABC} \{ф'^2 (BC\cos^2 ф \cos^2 э + AC \sin^2 э \cos^2 ф +$$

$$+ AB \sin^2 ф) + э'^2 (BC \sin^2 э + AC \cos^2 э) \sin^2 ф +$$

$$+ 2э'ф'C(A - B) \sin ф \cos ф \sin э \cos э\} \qquad (19)$$

Съ другой стороны, мы видѣли, что, введя $ж'$ въ выраженіе живой силы

---

[1]) Курсъ Аналит. Механ. Д. К. Бобылева.

(2) изъ уравненія (3) мы найдемъ:

$$2T = \frac{l^2 + \varphi'^2 (BC\cos^2\varphi\cos^2\vartheta + AC\sin^2\vartheta\cos^2\varphi + AB\sin^2\varphi) +}{A\sin^2\varphi\cos^2\vartheta + B\sin^2\varphi\sin^2\vartheta + C\cos^2\varphi}$$

$$\frac{+\vartheta'^2 C(A\sin^2\varphi\cos^2\vartheta + B\sin^2\varphi\sin^2\vartheta) + 2C(A-B)\vartheta'\varphi'\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\varphi\cos\varphi}{A\sin^2\varphi\cos^2\vartheta + B\sin^2\varphi\sin^2\vartheta + C\cos^2\varphi} \quad (20)$$

или, сравнивая это выраженіе съ (19):

$$2T = \frac{l^2 + ABC\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]}{A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2}$$

и слѣдовательно уравненіе (10) можно представить въ видѣ:

$$\delta\int\left[\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{l^2 + ABC\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}}{A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2} + U\right\}dt - l d\varkappa\right] = 0, \quad (21)$$

которое приметъ особенно простой видъ при $l = 0$, т. е. въ предположеніи, что постоянная площадей $= 0$, когда оно будетъ:

$$\delta\int_0^t\left\{\frac{1}{2}\frac{ABC\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right)}{A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2} + U\right\}dt = 0 \quad (22)$$

и въ этомъ видѣ это уравненіе напоминаетъ начало Гамильтона для движенія матеріальной точки по эллипсоиду (18). Мы сдѣлаемъ это сходство еще болѣе рѣзкимъ, если введемъ вмѣсто t новую независимую перемѣнную τ, положивъ:

$$\sigma dt = d\tau, \quad (23)$$

гдѣ
$$\sigma = (A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2)\cdot\frac{1}{ABC}.$$

Примѣняя правило Ліувилля, мы можемъ вмѣсто задачи, соотвѣтствующей уравненію (21), взять задачу соотвѣтствующую уравненію:

$$\delta\int_0^\tau\left\{\frac{1}{2}\left(\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2\right) + \frac{(U+h)ABC}{A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2}\right\}d\tau = 0 \quad (24)$$

причемъ постоянную *интеграла живой силы* въ новой задачѣ мы должны положить $= 0$. [1]).

Такимъ образомъ въ этомъ случаѣ задача о вращеніи твердаго тѣла

---

[1]) Доказательство см. Routh R. D. I art 431 (6-е изданіе 1891). Отъ него заимствуемъ и ссылку на Ліувилля и на Appell'я (Comptes Rendus 1892), приписавшаго это преобразованіе Darboux.

Такъ какъ, если

$$F(p) = \sqrt{l + p^2 m + 2np},$$

то

$$\frac{\partial F}{\partial p} = \frac{pm + n}{\sqrt{l + p^2 m + 2np}},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p^2} = \frac{(l + p^2 m + 2np)\, m - (pm + n)^2}{(l + p^2 m + 2np)^{3/2}} = \frac{lm - n^2}{(l + p^2 m + 2np)^{3/2}}.$$

Такимъ образомъ и здѣсь выполнено условіе сильнаго (starkes) minimum'a, но само собою разумѣется, что этотъ minimum распространяется какъ и въ первомъ случаѣ до ближайшаго лишь кинетическаго фокуса взаимнаго съ начальною конфигураціею тѣла.

Возвращаясь теперь къ дальнѣйшему изслѣдованію начала (10) введемъ вмѣсто $э$ и $ф$ новыя перемѣнныя, положивъ

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{A}}\lambda_{\circ}\text{[1]} = -\frac{1}{\sqrt{A}} \sin ф \cos э \\ y &= \frac{1}{\sqrt{B}}\mu_{\circ} = \frac{1}{\sqrt{B}} \sin ф \sin э \\ z &= \frac{1}{\sqrt{C}}\nu_{\circ} = \frac{1}{\sqrt{C}} \cos ф \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\frac{1}{\sqrt{A}} \cos ф \cos э ф' + \frac{1}{\sqrt{A}} \sin ф \sin э\, э' \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{1}{\sqrt{B}} \sin э \cos ф ф' + \frac{1}{\sqrt{B}} \sin ф \cos э\, э' \\ \frac{dz}{dt} &= -\frac{1}{\sqrt{C}} \sin ф\, ф'. \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Поэтому

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1. \qquad (18)$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \frac{1}{ABC}\{ф'^2 (BC\cos^2 ф \cos^2 э + AC \sin^2 э \cos^2 ф +$$

$$+ AB \sin^2 ф) + э'^2 (BC \sin^2 э + AC \cos^2 э) \sin^2 ф +$$

$$+ 2э'ф'C(A - B) \sin ф \cos ф \sin э \cos э\} \qquad (19)$$

Съ другой стороны, мы видѣли, что, введя $ж'$ въ выраженіе живой силы

[1]) Курсъ Аналит. Механ. Д. К. Бобылева.

(2) изъ уравненія (3) мы найдемъ:

$$2T = \frac{l^2 + \varphi'^2 (BC\cos^2\varphi\cos^2\vartheta + AC\sin^2\vartheta\cos^2\varphi + AB\sin^2\varphi) +}{A\sin^2\varphi\cos^2\vartheta + B\sin^2\varphi\sin^2\vartheta + C\cos^2\varphi}$$

$$\frac{+\vartheta'^2 C\,(A\sin^2\varphi\cos^2\vartheta + B\sin^2\varphi\sin^2\vartheta) + 2C(A-B)\vartheta'\varphi'\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\varphi\cos\varphi}{A\sin^2\varphi\cos^2\vartheta + B\sin^2\varphi\sin^2\vartheta + C\cos^2\varphi} \quad (20)$$

или, сравнивая это выраженіе съ (19):

$$2T = \frac{l^2 + ABC\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]}{A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2}$$

и слѣдовательно уравненіе (10) можно представить въ видѣ:

$$\delta\int\left[\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{l^2 + ABC\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}}{A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2} + U\right\}dt - l\,d\text{ж}\right] = 0, \quad (21)$$

которое приметъ особенно простой видъ при $l = 0$, т. е. въ предположеніи, что постоянная площадей $= 0$. когда оно будетъ:

$$\delta\int_0^t\left\{\frac{1}{2}\,\frac{ABC\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right)}{A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2} + U\right\}dt = 0 \quad (22)$$

и въ этомъ видѣ это уравненіе напоминаетъ начало Гамильтона для движенія матеріальной точки по эллипсоиду (18). Мы сдѣлаемъ это сходство еще болѣе рѣзкимъ, если введемъ вмѣсто t новую независимую перемѣнную τ, положивъ:

$$\sigma dt = d\tau, \quad (23)$$

гдѣ

$$\sigma = (A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2)\,.\,\frac{1}{ABC}\,.$$

Примѣняя правило Ліувилля, мы можемъ вмѣсто задачи, соотвѣтствующей уравненію (21), взять задачу соотвѣтствующую уравненію:

$$\delta\int_0^\tau\left\{\frac{1}{2}\left(\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2\right) + \frac{(U+h)\,ABC}{A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2}\right\}d\tau = 0 \quad (24)$$

причемъ постоянную *интеграла живой силы* въ новой задачѣ мы должны положить $= 0$. [1]).

Такимъ образомъ въ этомъ случаѣ задача о вращеніи твердаго тѣла

---

[1]) Доказательство см. Routh R. D. I art 431 (6-е изданіе 1891). Отъ него заимствуемъ и ссылку на Ліувилля и на Appell'я (Comptes Rendus 1892), приписавшаго это преобразованіе Darboux.

вокругъ неподвижной точки преобразована въ движеніе точки по эллипсоиду (18). При этомъ въ задачѣ о движеніи твердаго тѣла постоянная *площадей* должна равняться 0, а въ задачѣ о движеніи точки постоянная *интеграла живой силы* $= 0$.

Рѣшивъ задачу о движеніи точки, т. е. выразивъ всѣ элементы ея движенія черезъ τ мы вернемся къ перемѣнной t по формулѣ (23) какъ это будетъ объяснено на примѣрахъ [1]).

Но, примѣняя методъ Гамильтона-Якоби мы не будемъ нуждаться въ подобномъ преобразованіи, которое мы привели лишь какъ интерпретацію уравненія (22), такъ какъ легко видѣть, что уравненіе съ частными производными Якоби-Гамильтона остается тоже самое въ задачахъ (2) и (23). Переходъ отъ перемѣнной τ къ t особенно простъ, если эллипсоидъ (18) есть шаръ, т. е. $A = B = C$; тогда по уравненію (23) dt и $d\tau$ отличаются лишь на постоянный множитель.

Формула (22) даетъ возможность во многихъ случаяхъ рѣшить задачу о вращеніи тѣла, какъ мы это покажемъ на нѣсколькихъ примѣрахъ.

Приможемъ для этого вмѣсто прямоугольныхъ координатъ x, y, z эллиптическія координаты на поверхности эллипсоида (18) λ_1 и λ_2.

Мы будемъ имѣть въ этомъ случаѣ формулы:

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}=\frac{1}{8}\left\{\frac{(\lambda_1-\lambda_2)\lambda_1\lambda_1'^2}{\varphi(\lambda_1)}+\frac{(\lambda_2-\lambda_1)\lambda_2\lambda_2'^2}{\varphi(\lambda_2)}\right\}$$

$$A^2x^2=\frac{1}{\Delta}(C-B+A(C-B)(\lambda_1+\lambda_2)+A^2(C-B)\lambda_1\lambda_2)$$

$$B^2y^2=\frac{1}{\Delta}(A-C+B(A-C)(\lambda_1+\lambda_2)+B^2(A-C)\lambda_1\lambda_2)$$

$$C^2z^2=\frac{1}{\Delta}(B-A+C(B-A)(\lambda_1+\lambda_2)+C^2(B-A)\lambda_1\lambda_2),$$

гдѣ

$$\varphi(\lambda)=\left(\frac{1}{A}+\lambda\right)\left(\frac{1}{B}+\lambda\right)\left(\frac{1}{C}+\lambda\right)$$

$$ABC\Delta=(C-B)(A-C)(A-B).$$

Отсюда мы найдемъ

$$x^2+y^2+z^2=\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}+\lambda_1+\lambda_2$$

$$A^2x^2+B^2y^2+C^2z^2=ABC\lambda_1\lambda_2.$$

---

[1]) Примѣромъ такого перехода можетъ служить преобразованіе въ задачѣ С. В. Ковалевской прилагаемое къ настоящему разсужденію, а также въ задачѣ Н. Weber'а (см. нашу статью въ Сборникѣ И. И. П. С. 1903 г.).

Выраженіе живой силы тѣла приметъ видъ:

$$T=\frac{1}{8\lambda_1\lambda_2}\left\{\frac{(\lambda_1-\lambda_2)\lambda_1\lambda_1'^2}{\varphi(\lambda_1)}+\frac{(\lambda_2-\lambda_1)\lambda_2\lambda_2'^2}{\varphi(\lambda_2)}\right\} \tag{25}$$

$$p_{\lambda_1}=\frac{\partial T}{\partial\lambda_1'}=\frac{1}{4}\,\frac{(\lambda_1-\lambda_2)\lambda_1\lambda_1'}{\lambda_1\lambda_2\varphi(\lambda_1)}$$

$$p_{\lambda_2}=\frac{\partial T}{\partial\lambda_2'}=\frac{1}{4}\,\frac{(\lambda_2-\lambda_1)\lambda_2\lambda_2'}{\lambda_1\lambda_2\varphi(\lambda_2)}.$$

Дифференціальное уравненіе съ частными производными будетъ:

$$2\lambda_1\lambda_2\left\{\frac{\varphi(\lambda_1)}{(\lambda_1-\lambda_2)\lambda_1}\left(\frac{\partial V}{\partial\lambda_1}\right)^2+\frac{\varphi(\lambda_2)}{(\lambda_2-\lambda_1)\lambda_2}\left(\frac{\partial V}{\partial\lambda_2}\right)^2\right\}=U+h. \tag{26}$$

Допустимъ, что

$$U=\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\{\Phi(\lambda_1)-\Phi(\lambda_2)\}=\frac{\Phi(\lambda_1)-\Phi(\lambda_2)}{\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2}}. \tag{27}$$

Уравненіе (26) приметъ тогда видъ

$$\frac{2\varphi(\lambda_1)}{\lambda_1}\left(\frac{\partial V}{\partial\lambda_1}\right)^2-\frac{2\varphi(\lambda_2)}{\lambda_2}\left(\frac{\partial V}{\partial\lambda_2}\right)^2=-\Phi(\lambda_1)+\Phi(\lambda_2)+h\left(\frac{1}{\lambda_2}-\frac{1}{\lambda_1}\right).$$

Полный интегралъ будетъ

$$V=\int\frac{\sqrt{\lambda_1}\,.\sqrt{-\Phi(\lambda_1)-\frac{h}{\lambda_1}+C}}{\sqrt{2}\,.\sqrt{\varphi(\lambda_1)}}\,d\lambda_1+\int\frac{\sqrt{\lambda_2}\,.\sqrt{-\Phi(\lambda_2)-\frac{h}{\lambda_2}+C}}{\sqrt{2}\,.\sqrt{\varphi(\lambda_2)}}\,d\lambda_2,$$

а интегралы дифференціальныхъ уравненій представятся въ видѣ:

$$2\sqrt{2}\,\frac{\partial V}{\partial C}=const=\int\frac{\lambda_1\,d\lambda_1}{\sqrt{\varphi(\lambda_1)}\sqrt{C\lambda_1-h-\lambda_1\Phi(\lambda_1)}}+$$

$$+\int\frac{\lambda_2\,d\lambda_2}{\sqrt{\varphi(\lambda_2)}\sqrt{C\lambda_2-h-\lambda_2\Phi(\lambda_2)}}$$

$$2\sqrt{2}\,\frac{\partial V}{\partial h}=2\sqrt{2}\,(t-t_0)=\int\frac{d\lambda_1}{\sqrt{\varphi(\lambda_1)}\sqrt{C\lambda_1-h-\lambda_1\Phi(\lambda_1)}}+$$

$$+\int\frac{d\lambda_2}{\sqrt{\varphi(\lambda_2)}\sqrt{C\lambda_2-h-\lambda_2\Phi(\lambda_2)}}.$$

Примѣры:

1) Положимъ

$$\Phi(\lambda)=const\times\lambda$$

$$U=const\times(A^2x^2+B^2y^2+C^2z^2)=$$

$$=const\times(A\lambda_z^2+B\mu_z^2+C\nu_z^2); \tag{28}$$

мы получаемъ приведеніе къ ультраэллиптическимъ функціямъ задачи Brun'a [1]) для частнаго случая, когда постоянная площадей $= 0$.

2) Если мы положимъ:

$$\Phi(\lambda) = const \times \lambda^2$$

$$U = const \times \lambda_1\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2)$$

или

$$U = const \times (A\lambda_2^2 + B\mu_2^2 + C\nu_2^2)\left(\frac{1}{A}\lambda_2^2 + \frac{1}{B}\mu_2^2 + \frac{1}{C}\nu_2^2 - \frac{1}{A} - \frac{1}{B} - \frac{1}{C}\right). \quad (29)$$

Задача, какъ видно изъ нашихъ формулъ, приведется къ ультраэллиптическимъ функціямъ.

Такимъ образомъ на основаніи (28) и (29) мы можемъ заключить, что при потенціалахъ, равныхъ

A) $$U_1 = const \times (A\cos^2(z\Xi) + B\cos^2(zY) + C\cos^2(zZ))\left(\frac{1}{A}\sin^2(z\Xi) + \frac{1}{B}\sin^2(zY) + \frac{1}{C}\sin^2(zZ)\right)$$

B) $$U_2 = const \times (A\cos^2(z\Xi) + B\cos^2(zY) + C\cos^2(zZ))\left(\frac{1}{A}\cos^2(z\Xi) + \frac{1}{B}\cos^2(zY) + \frac{1}{C}\cos^2(zZ)\right)$$

или вообще

C) $$mU_1 + nU_2,$$

гдѣ m и n какія угодно числа, задача о вращеніи тѣла приводится къ ультраэллиптическимъ функціямъ *при постоянной площадей* $= 0$ и слѣдовательно въ этихъ случаяхъ можно à priori предсказать существованіе 4-го алгебраическаго интеграла.

3) Положимъ

$$\Phi(\lambda) = \frac{const}{\lambda^2},$$

въ этомъ случаѣ потенціалъ равенъ

$$const \times \frac{\frac{1}{A}\sin^2(z\Xi) + \frac{1}{B}\sin^2(zY) + \frac{1}{C}\sin^2(zZ)}{A\cos^2(z\Xi) + B\cos^2(zY) + C\cos^2(zZ)}.$$

Если эллипсоидъ инерціи есть эллипсоидъ вращенія т. е. $B = C$ вмѣсто эллиптическихъ координатъ удобнѣе всего, слѣдуя Якоби [2]), ввести коор-

[1]) Движеніе твердаго тѣла, всѣ точки котораго притягиваются ∵ разстоянію къ нѣкоторой неподвижной плоскости, проходящей черезъ неподвижную точку (см. Appell. Tr. d. M. Rat. art. 500). См. также Kobb. Bulletin de sciences mathématiques t. XXIII. Съ тѣми же уравненіями мы встрѣтимся въ теоріи вращенія твердаго тѣла въ жидкости.

[2]) Vorlesungen über Dynamik, St. 218.

Пусть $\lambda_1 = 0$, положимъ

$$x = \sqrt{\frac{B}{B-A}}\sqrt{\frac{1}{A}+\lambda_2}$$

$$y = \sqrt{\frac{A}{A-B}}\sqrt{\frac{1}{B}+\lambda_2}\,\sin\varphi$$

$$z = \sqrt{\frac{A}{A-B}}\sqrt{\frac{1}{B}+\lambda_2}\,\cos\varphi.$$

Тогда

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \frac{1}{4}\,\frac{A}{A-B}\,\frac{\lambda_2'^2}{\frac{1}{B}+\lambda_2} + \frac{A}{A-B}\left(\frac{1}{B}+\lambda_2\right)\varphi'^2 +$$

$$+\frac{1}{4}\,\frac{B}{B-A}\,\frac{\lambda_2'^2}{\frac{1}{A}+\lambda_2}$$

$$A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 = -\lambda_2 AB$$

и слѣдовательно

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] = \frac{\lambda_2}{8\left(\frac{1}{A}+\lambda_2\right)\left(\frac{1}{B}+\lambda_2\right)}\left(\frac{d\lambda_2}{dt}\right)^2 +$$

$$+\frac{1}{2}\,\frac{A}{A-B}\left(\frac{1}{B}+\lambda_2\right)\varphi'^2.$$

Очевидно, что, если

$$U = const \times \frac{\lambda_2}{\frac{1}{B}+\lambda_2}\,f(\varphi),$$

гдѣ $f(\varphi)$ какая угодно функція отъ φ, задача по нашимъ формуламъ приведется къ квадратурамъ.

ГЛАВА III.

Выводъ результатовъ главы II изъ другихъ соображеній.

Покажемъ теперь, что всѣ наши заключенія можно вывести изъ дифференціальныхъ уравненій вращенія твердаго тѣла, взятыхъ въ формѣ Эйлера.

Мы можемъ предположить U функціей отъ λ, μ, ν, (такъ какъ уголъ $\varkappa$ по условію въ U не входитъ) и тогда уравненія движенія мо

гутъ быть, какъ извѣстно написаны въ видѣ:

$$\left.\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} &= (B-C)qr + \frac{\partial U}{\partial\mu_z}\nu_z - \frac{\partial U}{\partial\nu_z}\mu_z \\ B\frac{dq}{dt} &= (C-A)pr + \frac{\partial U}{\partial\nu_z}\lambda_z - \frac{\partial U}{\partial\lambda_z}\nu_z \\ C\frac{dr}{dt} &= (A-B)qp + \frac{\partial U}{\partial\lambda_z}\mu_z - \frac{\partial U}{\partial\mu_z}\lambda_z \end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

къ которымъ мы должны прибавить 3 дифференціальныхъ уравненія, связывающихъ λ_z, μ_z, ν_z:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\lambda_z}{dt} &= r\mu_z - q\nu_z \\ \frac{d\mu_z}{dt} &= p\nu_z - r\lambda_z \\ \frac{d\nu_z}{dt} &= q\lambda_z - p\mu_z \end{aligned}\right\}. \tag{2}$$

Выведемъ теперь точку

$$x = \frac{\lambda_z}{\sqrt{A}}, \quad y = \frac{\mu_z}{\sqrt{B}}, \quad z = \frac{\nu_z}{\sqrt{C}};$$

тогда уравненія (2) примутъ видъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{1}{\sqrt{ABC}}(Bry\sqrt{C} - Cqz\sqrt{B}) \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{1}{\sqrt{ABC}}(Cpz\sqrt{A} - Arx\sqrt{C}) \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{1}{\sqrt{ABC}}(Aqx\sqrt{B} - Bpy\sqrt{A}) \end{aligned}\right\}. \tag{3}$$

Въ нашихъ предположеніяхъ насчетъ потенціала U дифференціальныя уравненія вращенія допускаютъ интегралъ площадей

$$A\sqrt{A}\,xp + B\sqrt{B}\,yq + C\sqrt{C}\,zr = const = l. \tag{4}$$

Рѣшая (3) и (4) относительно p, q, r, мы найдемъ выраженія

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{A}\,p &= \frac{Alx}{\sigma} + \frac{Czy' - Byz'}{\sigma}\sqrt{ABC} \\ \sqrt{B}\,q &= \frac{Bly}{\sigma} + \frac{Axz' - Czx'}{\sigma}\sqrt{ABC} \\ \sqrt{C}\,r &= \frac{Clz}{\sigma} + \frac{Byx' - Axy'}{\sigma}\sqrt{ABC} \end{aligned}\right\}, \tag{5}$$

гдѣ

$$\sigma = A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2.$$

Подставивъ теперь выраженія (5) въ уравненія (1), мы найдемъ три дифференціальныхъ уравненія 2-го порядка для x, y, z. Разсмотримъ 1-ое изъ этихъ уравненій

$$\sqrt{A}\frac{d}{dt}\left(\frac{Alx}{\sigma}+\frac{Czy'-Byz'}{\sigma}\sqrt{ABC}\right)=\frac{B-C}{\sqrt{BC}}\left(\frac{Bly}{\sigma}+\frac{Axz'-Czx'}{\sigma}\sqrt{ABC}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{Clz}{\sigma}+\frac{Byx'-Axy'}{\sigma}\sqrt{ABC}\right)+\frac{\partial U}{\partial\mu_1}\nu_1-\frac{\partial U}{\partial\nu_1}\mu_1.$$

Раздѣляя на $A\sqrt{BC}$ и умножая на σ^2, получимъ:

$$\frac{1}{\sqrt{ABC}}\left\{Al\sigma\frac{dx}{dt}-2Alx\left(A^2x\frac{dx}{dt}+B^2y\frac{dy}{dt}+C^2z\frac{dz}{dt}\right)+\right.$$

$$+\sigma(Czy''-Byz'')\sqrt{ABC}+(C-B)z'y'\sigma\sqrt{ABC}-$$

$$\left.-2(Czy'-Byz')(A^2xx'+B^2yy'+C^2zz')\sqrt{ABC}\right\}=$$

$$=(B-C)\left[\frac{1}{A}l^2zy+\frac{1}{\sqrt{ABC}}\{Bly(Byx'-Axy')+Clz(Axz'-Czx')\}+\right.$$

$$\left.+(Axz'-Czx')(Byx'-Axy')\right]+\frac{\sigma^2}{A\sqrt{BC}}\left(\frac{\partial U}{\partial\mu_1}\nu_1-\frac{\partial U}{\partial\nu_1}\mu_1\right) \qquad (6)$$

Замѣтимъ теперь, что

1) $(Axz'-Czx')(Byx'-Axy')=Ax.Byx'z'-CBzyx'^2-A^2x^2z'y'+$

$$+ACxzx'y'=(\text{т. к. } Axx'=-Byy'-Czz')=$$

$$=-Cz.By(x'^2+y'^2+z'^2)-\sigma z'y',$$

2) $$(B-C)\{Bly(Byx'-Axy')+Clz(Axz'-Czx')\}=$$

$$=(B-C)\{B^2y^2lx'-ABlxyy'+AClxzz'-C^2z^2lx'\}=$$

$$=(B^3y^2-BC^2z^2-CB^2y^2+C^3z^2)lx'+Ax(C-B)Byy'l+Ax(B-C)Czz'l.$$

Поэтому уравненіе (6) приметъ видъ:

$$\frac{1}{\sqrt{ABC}}\{Al\sigma x'-2A^3x^2lx'+\sigma\sqrt{ABC}(Czy''-Byz'')-$$

$$-2(Czy'-Byz')(A^2xx'+B^2yy'+C^2zz')\sqrt{ABC}\}=$$

$$=(B-C)\frac{l^2zy}{A}+\frac{1}{\sqrt{ABC}}\{(B^3y^2-BC^2z^2-CB^2y^2+C^3z^2)lx'-$$

$$-Ax(C+B)Axx'l\}-(B-C)By.Cz(x'^2+y'^2+z'^2)+\frac{\sigma^2}{A\sqrt{BC}}\left(\frac{\partial U}{\partial\mu_1}\nu_1-\frac{\partial U}{\partial\nu_1}\mu_1\right)$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{ABC}}\, lx' \{A^2x^2(C+B-A)+B^2y^2(A+C-B)+C^2z^2(A+B-C)\}+$$

$$+\sigma(Czy''-Byz'')-2(Czy'-Byz')(A^2xx'+B^2yy'+C^2zz')=$$

$$=(B-C)\frac{l^2zu}{A}-(B-C)\,Cz\,.\,By(x'^2+y'^2+z'^2)+$$

$$+\frac{\sigma^2}{A\sqrt{BC}}\left(\frac{\partial U}{\partial\mu_z}\nu_z-\frac{\partial U}{\partial\nu_z}\mu_z\right)$$

или раздѣляя на $By\,.\,Cz\,.\,\sigma^2$ и, обозначая:

$$A^2x^2(C+B-A)+B^2y^2(A+C-B)+C^2z^2(A+B-C)=\omega$$

и замѣтивъ, что

$$\sigma x'=Cz\,(Czx'-Axz')-By\,(Axy'-Byx')$$

$$\frac{\partial U}{\partial\mu_z}\nu_z-\frac{\partial U}{\partial\nu_z}\mu_z=\sqrt{\frac{C}{B}}\,\frac{\partial U}{\partial y}\,z-\sqrt{\frac{B}{C}}\,\frac{\partial U}{\partial z}\,y$$

мы получимъ уравненіе:

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{ABC}}\left\{\frac{l\omega(Czx'-Axz')}{\sigma^3}+\sqrt{ABC}\,\frac{d}{dt}\,\frac{y'}{\sigma}\right\}+\frac{1}{2}\,\frac{\partial\frac{l^2}{\sigma}}{\partial y}\,\frac{1}{ABC}-\frac{1}{2}\,\frac{\partial\left\{\frac{x'^2+y'^2+z'^2}{\sigma}\right\}}{\partial y}-\frac{\partial U}{\partial y}\,\frac{1}{ABC}}{By}=$$

$$=\frac{\frac{1}{\sqrt{ABC}}\left\{\frac{l\omega(Axy'-Byx')}{\sigma^3}+\sqrt{ABC}\,\frac{d}{dt}\,\frac{z'}{\sigma}\right\}+\frac{1}{2}\,\frac{\partial\frac{l^2}{\sigma}}{\partial z}\,\frac{1}{ABC}-\frac{1}{2}\,\frac{\partial\left\{\frac{x'^2+y'^2+z'^2}{\sigma}\right\}}{\partial z}-\frac{\partial U}{\partial z}\,\frac{1}{ABC}}{Cz}.$$

Два другія дифференціальныя уравненія получаются изъ этихъ круговою перестановкою буквъ.

Поэтому, обозначивъ

$$ABC\,\frac{\frac{1}{2}(x'^2+y'^2+z'^2)}{A^2x^2+B^2y^2+C^2z^2}=\psi,$$

мы можемъ написать дифференціальныя уравненія вращенія въ видѣ:

$$\frac{d\frac{\partial(\psi+U)}{\partial x}}{dt}=\frac{\partial(\psi+U)}{\partial x}-\frac{l^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sigma}\right)-\sqrt{ABC}\frac{l\omega(Byz'-Czy')}{\sigma^3}+\lambda Ax \quad (7)$$

съ 2-мя аналогичными уравненіями для y и для z.

Легко показать, что эти уравненія какъ разъ соотвѣтствуютъ уравненію (21) II главы, т. е.

$$\delta\int_0^t\left[\left\{\frac{1}{2}\frac{l^2+ABC\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}}{A^2x^2+B^2y^2+C^2z^2}+U\right\}dt-l\,d\text{ж}\right]=0 \quad (8)$$

гдѣ вмѣсто dж должно быть подставлено его выраженіе (9) II главы, которое въ перемѣнныхъ x, y, z приметъ видъ

$$\frac{d\text{ж}}{dt}=\frac{l-\sqrt{ABC}\left\{\frac{y(Czx'-Axz')+x(Byz'-Czy')}{Ax^2+By^2}\right\}}{\sigma}=$$

$$=\frac{l}{\sigma}-\sqrt{ABC}\frac{\Phi}{\sigma(Ax^2+By^2)},$$

гдѣ

$$\Phi=y(Czx'-Axz')+x(Byz'-Czy'),$$

такъ какъ легко провѣрить, что

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{Ax}\left[\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\Phi}{\sigma(Ax^2+By^2)}\right)\right\}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Phi}{\sigma(Ax^2+By^2)}\right)-\frac{\omega(Byz'-Czy')}{\sigma^3}\right]=\\
=&\frac{1}{By}\left[\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\Phi}{\sigma(Ax^2+By^2)}\right)\right\}-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\Phi}{\sigma(Ax^2+By^2)}\right)-\frac{\omega(Czx'-Axz')}{\sigma^3}\right]=\\
=&\frac{1}{Cz}\left[\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{\Phi}{\sigma(Ax^2+By^2)}\right)\right\}-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\Phi}{\sigma(Ax^2+By^2)}\right)-\frac{\omega(Axy'-Byx')}{\sigma^3}\right]
\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

откуда и видно, что уравненіе (8) какъ разъ приводитъ къ уравненіямъ (7).

Соотношенія же (9) провѣряются тоже непосредственно: послѣ умноженія ихъ на $\sigma^2(Ax^2+By^2)$ онѣ легко приводятся къ виду

$$\frac{1}{Ax}\Big\{yz'\{A^2x^2(C+B-A)+B^2y^2(C-B+A)+C^2z^2(A-B-C)\}-$$

$$-2zy'C(A^2x^2+B^2y^2)-\frac{\omega}{\sigma}(A^2x^2+B^2y^2)(Byz'-Czy')\Big\}=$$

$$=\frac{1}{By}\Big\{xz'\{A^2x^2(A-B-C)+B^2y^2(B-A-C)+C^2z^2(A-B+C)\}-$$

$$-2zx'C(A^2x^2+B^2y^2)-\frac{\omega}{\sigma}(A^2x^2+B^2x^2)(Czx'-Axz')\Big\}=$$

$$=\frac{1}{Cz}\Big\{yz'\{A^2x^2(C+B-A)+B^2y^2(C-B+A)+C^2z^2(A-B-C)\}-$$

$$-2zy'C(A^2x^2+B^2y^2)-\frac{\omega}{\sigma}(A^2x^2+B^2y^2)(Byz'-Czy')\Big\}.$$

Принимая во вниманіе, что

$$-2Czy'(A^2x^2+B^2y^2)=\{2Czx'.By-2Czx.Ay'\}Ax+2C^2z^2.Bz'y$$

$$2Czx'(A^2x^2+B^2y^2)=\{2Czx'.By-2Czx.Ay'\}By-2C^2z^2.Az'x$$

и вычитая, и прибавляя къ 3-му изъ уравненій (10) по

$$\{2Byx'.By-2Az.Cxy'\}Cz$$

мы приведемъ ихъ по сокращеніи на

$$\omega=A^2x^2(C+B-A)+B^2y^2(A+C-B)+C^2z^2(A+B-C)$$

къ виду:

$$\frac{\sigma yz'-(Ax^2+By^2)(Byz'-Czy')}{Ax}=\frac{-xz'\sigma-(Ax^2+By^2)(Czx'-Axz')}{By}=$$

$$=\frac{\sigma(xy'-yx')-(Ax^2+By^2)(Axy'-Byx')}{Cz},$$

что очевидно, такъ какъ

1) $$(A^2x^2+B^2y^2+C^2z^2)yz'-(Ax^2+By^2)(Byz'-Czy')=$$

$$=(A^2x^2+C^2z^2-ABx^2)yz'+(Ax^2+By^2)Czy'=$$

$$=Ax\{(A-B)xyz'+Cz(xy'-yx')\};$$

2) $$-xz'\sigma-(Ax^2+By^2)(Czx'-Axz')=By\{(A-B)xyz'+Cz(xy'-yx')\};$$

3) $$\sigma(xy'-yx')-(Ax^2+By^2)(Axy'-Byx')=$$

$$=Cz\Big\{Cz(xy'-yx')+\frac{(A^2x^2+B^2y^2)(xy'-yx')-(Ax^2+By^2)(Axy'-Byx')}{Cz}\Big)=$$

$$=Cz\{Cz(xy'-yx')+(A-B)yxz'\}.$$

Такимъ образомъ и этимъ путемъ мы приходимъ къ одному и тому же результату.

Мы сдѣлаемъ теперь слѣдующее важное для насъ *замѣчаніе*.

Уголъ $\varkappa$ отсчитывается отъ неподвижной плоскости zox до плоскости проходящей черезъ неподвижную ось Oz и подвижную OZ, но въ ура-

вненіи (8) (или (21) II главы) его можно отсчитывать отъ плоскости *zox* до плоскости проходящей черезъ *Oz* и *какую угодно* неизмѣнно связанную съ твердымъ тѣломъ (и проходящую черезъ неподвижную точку) прямую.

Въ самомъ дѣлѣ, стоитъ только съ этой прямой совмѣстить одну изъ осей неизмѣнно связанныхъ съ тѣломъ (OZ), чтобы получить этотъ результатъ, такъ какъ видоизмѣненная функція Лагранжа будетъ тогда какъ разъ содержать производную отъ новаго угла (т. е. членъ $-l\frac{d\varkappa}{dt}$) и слѣдовательно переходя къ старымъ осямъ мы получимъ дополнительный членъ въ требуемомъ видѣ.

Живая сила въ новыхъ осяхъ конечно, вообще говоря, будетъ имѣть болѣе сложный видъ такъ какъ онѣ не будутъ главными осями инерціи, но на способъ видоизмѣненія Лагранжевской функціи и на окончательный видъ результата это не вліяетъ.

Тотъ же результатъ можно получить изъ слѣдующей простой леммы:

Лемма. Если $f(x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_n, x'_1, x'_2, \ldots\ldots x'_n)$ есть полная производная по t отъ нѣкоторой функціи $F(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n)$ т. е.

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n, x_1', x'_2, \ldots\ldots x'_n) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial F}{\partial x_i} x'_i$$

то функція $f(x_1, \ldots\ldots x'_1 \ldots\ldots)$ удовлетворяетъ соотношенію:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial x'_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \tag{11}$$

Въ самомъ дѣлѣ:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial x'_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{dF}{dt}\right) = \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Эта лемма очевидна и изъ слѣдующихъ соображеній:

Возьмемъ

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} f dt$$

гдѣ t_0 и t_1 нѣкоторыя постоянныя и предположимъ, что для

$$t = t_0 \text{ и } t = t_1 \text{ всѣ } \delta x_i = 0$$

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} f dt = \delta\int_{t_0}^{t_1} \frac{dF}{dt} dt = \Big[\delta F\Big]_{t_0}^{t_1} = 0$$

а развертывая эту варіацію по правиламъ варіаціоннаго исчисленія, мы получимъ при данныхъ условіяхъ уравненія (11) [1]).

[1]) Этимъ путемъ доказана эта леммма въ болѣе общемъ видѣ L. Königsberger'омъ (См. его Über Principien der Mechanik Seite 16—17).

Поэтому результаты нашего изслѣдованія мы можемъ выразить въ слѣдующей формѣ:

Выразимъ при помощи интеграла площадей въ плоскости перпендикулярной нѣкоторой неподвижной въ пространствѣ оси (oz) и 3-хъ дифференціальныхъ уравненій [1]) связывающихъ проэкціи угловой скорости тѣла на 3 неизмѣнно съ нимъ связанныя оси съ косинусами угловъ, образованныхъ этими осями съ предъидущей осью (oz) и ихъ (косинусовъ) производными по времени—проэкціи угловой скорости на неизмѣнно съ тѣломъ связанныя оси (p, q, r) черезъ косинусы и ихъ производныя.

Введемъ вмѣсто этихъ 3-хъ косинусовъ (λ_z, μ_z, ν_z) два параметра e_1, e_2 черезъ которые эти косинусы могутъ быть всѣ выражены (напр. 2 угла ϑ и φ).

Такимъ образомъ проэкціи угловой скорости (p, q, r) окажутся выраженными черезъ 2 параметра e_1, e_2 и ихъ производныя по времени e'_1, e'_2.

Подставимъ эти выраженія въ дифференціальныя уравненія Эйлера вращательнаго движенія тѣла вокругъ неподвижной точки (1).

Мы получимъ такимъ образомъ 2 уравненія 2-го порядка для e_1 и e_2, которымъ можно дать слѣдующую интерпретацію:

Возьмемъ въ тѣлѣ какую нибудь неизмѣнно съ нимъ связанную прямую QZ; пусть во время dt эта прямая поворачивается вокругъ оси Oz на уголъ $d\text{ж}$ (подъ угломъ поворота мы разумѣемъ уголъ образованный 2-мя плоскостями проведенными черезъ Oz черезъ 2 прямыя проходящими черезъ O $\|$-но 2-мъ положеніямъ нашей прямой).

Тогда совокупность 2-хъ составленныхъ на для e_1 и e_2 уравненій 2-ого порядка, соотвѣтствуетъ уравненію:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left((T + U)\, dt - l\, d\text{ж} \right) = 0$$

гдѣ T живая сила тѣла. а l постоянная интеграла площадей.

Если мы обозначимъ черезъ α, β, γ косинусы угловъ, которые образуютъ съ осями инерціи направленіе разсматриваемой неизмѣнно связанной съ тѣломъ прямой, то

$$d\text{ж} = \frac{p\lambda_z + q\mu_z + r\nu_z - (\alpha\lambda_z + \beta\mu_z + \gamma\nu_z)(\alpha p + \beta q + \gamma r)}{1 - (\alpha\lambda_z + \beta\mu_z + \gamma\nu_z)^2}\, dt$$ [2]).

Какъ примѣръ мы разсмотримъ движеніе симметричнаго гироскопа вокругъ какой нибудь точки на оси симметріи.

. . . .

[1]) т. е. дифференціальныхъ уравненій (2) стр. 28.

[2]) Это выраженіе можетъ быть написано сразу при помощи формулы кинематики $\frac{d\text{ж}}{dt} = \frac{p\lambda z + q\mu z}{Sin^2\varphi} = \frac{(\text{проэкц. угл. на } oz) - (\text{проэкц. угл. скор. ск. на } OZ) \times Cos zZ}{Sin^2 (zZ)}$

Мы имѣемъ въ этомъ случаѣ уравненія:

$$\left.\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} &= (A-C)\,qr - P\mu_z \\ A\frac{dq}{dt} &= (C-A)\,rp + P\lambda_z \\ \frac{dr}{dt} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\lambda_z}{dt} &= r\mu_z - q\nu_z \\ \frac{d\mu_z}{dt} &= p\nu_z - r\lambda_z \\ \frac{d\nu_z}{dt} &= q\lambda_z - p\mu_z \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Если при помощи интеграла

$$A\,(p\lambda_z + q\mu_z) + Cr\nu_z = l$$

и 3-хъ дифференціальныхъ уравненій (13) найдемъ p, q, r и подставимъ ихъ въ (12), то придемъ къ 2-мъ уравненіямъ 2-ого порядка относительно угловъ $э$ и $ф$ соотвѣтствующихъ выраженію

$$\delta \int_0^t \left(T + U - l\,\frac{dж}{dt}\right) dt = 0.$$

Замѣтимъ, что въ данномъ случаѣ въ потенціалъ U не входитъ и уголъ $э$, который при этомъ не входитъ и въ T, такъ что мы имѣемъ еще интегралъ

$$\frac{\partial T}{\partial э'} = l_1 = Cr, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (14)$$

при помощи котораго можно также видоизмѣнить функцію Лагранжа.

Воспользовавшись интеграломъ (14), мы можемъ при помощи уравненій (13) выразить p, q, r черезъ $ф'$ и $ж'$.

Подставивъ эти выраженія въ (12) мы найдемъ 2 дифференціальныя уравненія 2-го порядка относительно $ф$ и $ж$, соотвѣтствующихъ выраженію

$$\delta \int_0^t (T + U - l_1 э')\, dt = 0, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (15)$$

гдѣ $э'$ должно быть исключено при помощи уравненія (14), такъ что

Поэтому результаты нашего изслѣдованія мы можемъ выразить въ слѣдующей формѣ:

Выразимъ при помощи интеграла площадей въ плоскости перпендикулярной нѣкоторой неподвижной въ пространствѣ оси (oz) и 3-хъ дифференціальныхъ уравненій [1]) связывающихъ проэкціи угловой скорости тѣла на 3 неизмѣнно съ нимъ связанныя оси съ косинусами угловъ, образованныхъ этими осями съ предъидущей осью (oz) и ихъ (косинусовъ) производными по времени—проэкціи угловой скорости на неизмѣнно съ тѣломъ связанныя оси (p, q, r) черезъ косинусы и ихъ производныя.

Введемъ вмѣсто этихъ 3-хъ косинусовъ (λ_z, μ_z, ν_z) два параметра e_1, e_2 черезъ которые эти косинусы могутъ быть всѣ выражены (напр. 2 угла ϑ и φ).

Такимъ образомъ проэкціи угловой скорости (p, q, r) окажутся выраженными черезъ 2 параметра e_1, e_2 и ихъ производныя по времени e'_1, e'_2.

Подставимъ эти выраженія въ дифференціальныя уравненія Эйлера вращательнаго движенія тѣла вокругъ неподвижной точки (1).

Мы получимъ такимъ образомъ 2 уравненія 2-го порядка для e_1 и e_2, которымъ можно дать слѣдующую интерпретацію:

Возьмемъ въ тѣлѣ какую нибудь неизмѣнно съ нимъ связанную прямую QZ; пусть во время dt эта прямая поворачивается вокругъ оси Oz на уголъ $d\text{ж}$ (подъ угломъ поворота мы разумѣемъ уголъ образованный 2-мя плоскостями проведенными черезъ Oz черезъ 2 прямыя проходящими черезъ O $\|$-но 2-мъ положеніямъ нашей прямой).

Тогда совокупность 2-хъ составленныхъ на для e_1 и e_2 уравненій 2-ого порядка, соотвѣтствуетъ уравненію:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left((T + U)\, dt - l\, d\text{ж} \right) = 0$$

гдѣ T живая сила тѣла, а l постоянная интеграла площадей.

Если мы обозначимъ черезъ α, β, γ косинусы угловъ, которые образуетъ съ осями инерціи направленіе разсматриваемоі неизмѣнно связанной съ тѣломъ прямой, то

$$d\text{ж} = \frac{p\lambda_z + q\mu_z + r\nu_z - (\alpha\lambda_z + \beta\mu_z + \gamma\nu_z)\ (\alpha p + \beta q + \gamma r)}{1 - (\alpha\lambda_z + \beta\mu_z + \gamma\nu_z)^2}\, dt \text{ [2]}).$$

Какъ примѣръ мы разсмотримъ движеніе симметричнаго гироскопа вокругъ какой нибудь точки па оси симметріи.

---

[1]) т. е. дпфференціальныхъ уравненій (2) стр. 28.

[2]) Это выраженіе можетъ быть написано сразу при помощи формулы кинематики

$$\frac{d\text{ж}}{dt} = \frac{p\lambda z + q\mu z}{Sin^2\varphi} = \frac{(\text{проэкц. угл. на } oz) - (\text{проэкц. угл. скор. ск. на } OZ) \times Cos zZ}{Sin^2 (zZ)}$$

Мы имѣемъ въ этомъ случаѣ уравненія:

$$\left.\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} &= (A-C)\,qr - P\mu_z \\ A\frac{dq}{dt} &= (C-A)\,rp + P\lambda_z \\ \frac{dr}{dt} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\lambda_z}{dt} &= r\mu_z - q\nu_z \\ \frac{d\mu_z}{dt} &= p\nu_z - r\lambda_z \\ \frac{d\nu_z}{dt} &= q\lambda_z - p\mu_z \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Если при помощи интеграла

$$A\,(p\lambda_z + q\mu_z) + Cr\nu_z = l$$

и 3-хъ дифференціальныхъ уравненій (13) найдемъ p, q, r и подставимъ ихъ въ (12), то придемъ къ 2-мъ уравненіямъ 2-ого порядка относительно угловъ ϑ и φ соотвѣтствующихъ выраженію

$$\delta\int_0^t \left(T + U - l\,\frac{d\psi}{dt}\right) dt = 0.$$

Замѣтимъ, что въ данномъ случаѣ въ потенціалъ U не входитъ и уголъ ϑ, который при этомъ не входитъ и въ T, такъ что мы имѣемъ еще интегралъ

$$\frac{\partial T}{\partial \vartheta'} = l_1 = Cr, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (14)$$

при помощи котораго можно также видоизмѣнить функцію Лагранжа.

Воспользовавшись интеграломъ (14), мы можемъ при помощи уравненій (13) выразить p, q, r черезъ φ' и ψ'.

Подставивъ эти выраженія въ (12) мы найдемъ 2 дифференціальныя уравненія 2-го порядка относительно φ и ψ, соотвѣтствующихъ выраженію

$$\delta\int_0^t (T + U - l_1\vartheta')\; dt = 0, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (15)$$

гдѣ ϑ' должно быть исключено при помощи уравненія (14), такъ что

уравненіе (15) приметъ видъ

$$\delta \int_0^t \left\{ \frac{A}{2} (\phi'^2 + \sin^2 \phi\, ж'^2) + l_1 ж' \cos \phi + U \right\} dt = 0,$$

который легко провѣрить непосредственно.

Наконецъ, можно заразъ видоизмѣнить Лагранжевскую функцію, какъ при помощи интеграла (14), такъ и при помощи интеграла площадей. Мы придемъ для перемѣнной ϕ къ уравненію:

$$\delta \int_0^t (T + U - l ж' - l_1 э') \, dt = 0.$$

Въ частныхъ случаяхъ: $l = 0$, $l_1 = 0$ или $l = l_1 = 0$ какъ мы видѣли уже въ главѣ I (стр. 10—11) видъ видоизмѣненыхъ уравненій особенно простой.

ГЛАВА IV.

Объ одномъ приложеніи преобразованія Якоби для перехода отъ одной канонической системы дифференціальныхъ уравненій къ другой къ задачѣ о видоизмѣненіи функціи Лагранжа.

Предположимъ, что условія движенія твердаго тѣла остаются тѣми же какъ и въ главахъ II и III, а именно, что дифференціальныя уравненія движенія допускаютъ интегралъ площадей въ плоскости $\perp$-ой къ нѣкоторой неподвижной оси z-овъ, т. е. что существуетъ интегралъ

$$p_ж = const = l,$$

но представимъ себѣ, что мы пожелали составить дифференціальныя уравненія, которымъ удовлетворяютъ одни p, q, r (безъ λ_z, μ_z, ν_z) подобно тому какъ въ главѣ III мы составляли дифференціальныя уравненія, которымъ удовлетворяютъ одни λ_z, μ_z, ν_z и для этого стали бы рѣшать систему уравненій (1) и интеграла (4) относительно λ_z, μ_z, ν_z, а полученныя выраженія подставили въ уравненія (2).

Такое преобразованіе весьма удобно тогда, когда эллипсоидъ инерціи есть эллипсоидъ вращенія т. е. $A = B$ и за перемѣнныя параметры взяты моментъ количества движенія тѣла.

$$\sqrt{A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2}$$

и проекція его на одну изъ осей (напр. Z) Cr.

Мы сначала не будемъ предполагать $A = B$ и дадимъ общія формулы перехода къ новымъ перемѣннымъ, предположивъ, что эти новыя

перемѣнныя u и v функціи отъ этихъ параметровъ (въ частномъ случаѣ = этимъ параметрамъ). Поэтому мы можемъ предположить

$$\left.\begin{aligned} A^2p^2 + B^2q^2 &= F(u, v) \\ Cr &= \Phi(u, v) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

гдѣ F и Φ знаки какихъ угодно функцій отъ u и v. На основаніи формулы (5) II главы (стр. 15):

$$A^2p^2 + B^2q^2 = p^2_\phi + \frac{(l - p_э \cos\phi)^2}{\sin^2\phi}$$

$$Cr = p_э .$$

Введемъ теперь вмѣсто ϕ и $э$ новыя перемѣнныя (1), положивъ

$$\left.\begin{aligned} p^2_\phi + \frac{(l - p_э\cos\phi)^2}{\sin^2\phi} &= F(u, v) \\ p_э &= \Phi(u, v) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Составимъ функцію, частныя производныя которой по $э$ и по ϕ равны $p_э$ и p_ϕ и для этого изъ уравненій (2) найдемъ

$$p_э = \Phi(u, v)$$

$$p_\phi = \sqrt{F(u, v) - \frac{(l - \Phi(u, v)\cos\phi)^2}{\sin^2\phi}};$$

мы можемъ теперь за эту функцію взять

$$\varphi(u, v, э, \phi) = \Phi(u, v)\,.\,э + \int\sqrt{F(u, v) - \frac{(l - \Phi(u, v)\cos\phi)^2}{\sin^2\phi}}\,d\phi.$$

Перейдемъ теперь по извѣстному правилу Якоби *) отъ старыхъ каноническихъ перемѣнныхъ $э, \phi, p_э, p_\phi$ къ новымъ u, v, p_u, p_v по формуламъ

$$p_э = \frac{\partial\varphi}{\partial э} = \Phi(u, v)$$

$$p_\phi = \frac{\partial\varphi}{\partial\phi} = \sqrt{F(u, v) - \frac{(l - \Phi(u, v)\cos\phi)^2}{\sin^2\phi}}$$

$$p_u = -\frac{\partial\varphi}{\partial u} = -э\frac{\partial\Phi}{\partial u} - \frac{1}{2}\int\frac{\dfrac{\partial F}{\partial u} + 2\dfrac{(l - \Phi(u, v)\cos\phi)}{\sin^2\phi}\cos\phi\dfrac{\partial\Phi}{\partial u}}{\sqrt{F(u, v) - \dfrac{(l - \Phi(u, v)\cos\phi)^2}{\sin^2\phi}}}\,d\phi$$

$$p_v = -\frac{\partial\varphi}{\partial v} = -э\frac{\partial\Phi}{\partial v} - \frac{1}{2}\int\frac{\dfrac{\partial F}{\partial v} + 2\dfrac{(l - \Phi(u, v)\cos\phi)}{\sin^2\phi}\cos\phi\dfrac{\partial\Phi}{\partial v}}{\sqrt{F(u, v) - \dfrac{(l - \Phi(u, v)\cos\phi)^2}{\sin^2\phi}}}\,d\phi.$$

*) «Methodus nova equationes differentiales....» Crelle t. 60.

Квадратуры стоящія во второй части легко выражаются при помощи логариѳмовъ (при интегрированіи на u и на v мы смотримъ какъ на постоянныя).

Этимъ путемъ можно напр. легко свести къ квадратурамъ случай вращенія тяжелаго твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки указанный Д. Н. Горячевымъ и получить формулы С. А. Чаплыгина, выведенныя при помощи замѣченнаго имъ для этого случая 4-го алгебраическаго интеграла. Въ этомъ случаѣ мы имѣемъ относительно моментовъ инерціи условіе

$$A = B = 4, \quad C = 1; \quad l = 0,$$

а центръ тяжести лежитъ въ плоскости равныхъ моментовъ инерціи [1]).

Предполагая, что ось z-овъ взята въ направленіи силы тяжести, мы можемъ представить потенціалъ ея въ видѣ:

$$U = a\lambda_z.$$

Дифференціальное уравненіе съ частными производными Якоби имѣетъ въ этомъ случаѣ видъ:

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\right)^2 cotg^2\, \varphi\right)\right\} = a\lambda_z + h.$$

Возьмемъ въ формулахъ преобразованія (2):

$$\Phi(u, v) = i(u + v)$$

$$F(u, v) = 4uv.$$

Мы найдемъ:

$$p_\vartheta = i\,(u + v)$$

$$p_\varphi = \sqrt{4uv + (u + v)^2 cotg^2\, \varphi}$$

$$p_u = -\vartheta i - \int \frac{2v + (u + v)\, cot^2\, \varphi}{\sqrt{4uv + (u + v)^2 cot^2 \varphi}}\, d\varphi = -i\vartheta +$$

$$+ lg\, \{a \cos\varphi\, \{(v + u)\, cotg\, \varphi + \sqrt{4uv + (u + v)^2 cot^2\, \varphi}\} + 2ua \sin\varphi\}$$

$$p_v = -\vartheta i - \int \frac{2u + (u + v)\, cot^2\, \varphi}{\sqrt{4uv + (u + v)^2 cot^2\, \varphi}}\, d\varphi = -i\vartheta +$$

$$+ lg\, \{a \cos\varphi\, \{(v + u)\, cotg\, \varphi + \sqrt{4uv + (u + v)^2 cot^2\, \varphi}\} + 2va \sin\varphi\}$$

(при надлежащемъ выборѣ постоянныхъ интегрированія). Отсюда мы найдемъ формулы:

---

[1]) Этотъ случай замѣченъ Д. Н. Горячевымъ (Моск. Сб. 1900 г.) Квадратуры его даны С. А. Чаплыгинымъ (Труды II. О. Л. Е. 1901 г.).

$$\left.\begin{aligned} e^{p_u+i\vartheta} &= a\cos\beta\{(v+u)\cot g\,\beta+\sqrt{4uv+(u+v)^2\cot^2\beta}\}+2ua\sin\beta \\ \text{и}\qquad & \\ e^{p_v+i\vartheta} &= a\cos\beta\{(v+u)\cot g\,\beta+\sqrt{4uv+(u+v)^2\cot^2\beta}\}+2vu\sin\beta \end{aligned}\right\} \quad (39)$$

Отсюда:

$$\frac{e^{p_u}-e^{p_v}}{2a(v-u)} = -\sin\beta e^{-\vartheta i} = -\sin\beta\cos\vartheta + i\sin\beta\sin\vartheta = \lambda_z + i\mu_z$$

и

$$\frac{(ve^{p_u}-ue^{p_v})\,e^{i\vartheta}}{a(v-u)\{(v+u)\cot g\,\beta+\sqrt{4uv+(u+v)^2\cot g^2\beta}\}} = \cos\beta = \nu_z.$$

Но

$$\frac{e^{i\vartheta}}{a((v+u)\cot g\,\beta+\sqrt{4uv+(u+v)^2\cot g^2\beta})} = e^{-\frac{p_u+p_v}{2}},$$

такъ какъ, перемноживъ (39) мы найдемъ:

$$e^{2i\vartheta+p_u+p_v} = a^2((v+u)\cot\beta+\sqrt{4uv+(u+v)^2\cot^2\beta})^2.$$

Поэтому

$$1-\cos^2\beta = 1-\nu_z^2 = \frac{e^{p_u}-e^{p_v}}{(u-v)^2}(u^2e^{-p_u}-v^2e^{-p_v})$$

и

$$\lambda_z - i\mu_z = \frac{1-\nu_z^2}{\lambda_z+i\mu_z} = \frac{e^{p_u}-e^{p_v}}{(u-v)^2}(u^2e^{-p_u}-v^2e^{-p_v}) : \frac{e^{p_u}-e^{p_v}}{2a(v-u)} =$$

$$= -2a\frac{u^2e^{-p_u}-v^2e^{-p_v}}{u-v}$$

и слѣдовательно

$$-a\lambda_z = \frac{a}{2}\left\{\frac{1}{2a}\frac{e^{p_u}-e^{p_v}}{u-v}+2a\frac{u^2e^{-p_u}-v^2e^{-p_v}}{u-v}\right\}.$$

Поэтому уравненіе живой силы въ новыхъ перемѣнныхъ будетъ имѣть видъ:

$$-\frac{1}{2}\{u^2+uv+v^2\}+\frac{1}{4}\frac{e^{p_u}-e^{p_v}+4a^2(u^2e^{-p_u}-v^2e^{-p_v})}{u-v} = h$$

или

$$-(u^3-v^3)+\frac{1}{2}(e^{p_u}-e^{p_v}+4a^2(u^2e^{-p_u}-v^2e^{-p_v})) = 2h(u-v).$$

Уравненіе съ частными производными въ новыхъ перемѣнныхъ приметъ слѣдующій видъ:

$$\left(-u^3+\frac{1}{2}e^{\frac{\partial V}{\partial u}}+2a^2u^2e^{-\frac{\partial V}{\partial u}}-2hu\right)-\left(-v^3+\frac{1}{2}e^{\frac{\partial V}{\partial v}}+2a^2v^2e^{-\frac{\partial V}{\partial v}}-2hv\right)=0.$$

Квадратуры стоящія во второй части легко выражаются при помощи логариѳмовъ (при интегрированіи на u и на v мы смотримъ какъ на постоянныя).

Этимъ путемъ можно напр. легко свести къ квадратурамъ случай вращенія тяжелаго твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки указанный Д. Н. Горячевымъ и получить формулы С. А. Чаплыгина, выведенныя при помощи замѣченнаго имъ для этого случая 4-го алгебраическаго интеграла. Въ этомъ случаѣ мы имѣемъ относительно моментовъ инерціи условіе

$$A = B = 4, \quad C = 1; \quad l = 0,$$

а центръ тяжести лежитъ въ плоскости равныхъ моментовъ инерціи [1]).

Предполагая, что ось z-овъ взята въ направленіи силы тяжести, мы можемъ представить потенціалъ ея въ видѣ:

$$U = a\lambda_z.$$

Дифференціальное уравненіе съ частными производными Якоби имѣетъ въ этомъ случаѣ видъ:

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\right)^2 cotg^2\, \varphi\right)\right\} = a\lambda_z + h.$$

Возьмемъ въ формулахъ преобразованія (2):

$$\Phi(u, v) = i(u + v)$$

$$F(u, v) = 4uv.$$

Мы найдемъ:

$$p_\vartheta = i(u + v)$$

$$p_\varphi = \sqrt{4uv + (u + v)^2 cotg^2\, \varphi}$$

$$p_u = -\vartheta i - \int \frac{2v + (u + v)\, cot^2\, \varphi}{\sqrt{4uv + (u + v)^4 cot^2\, \varphi}}\, d\varphi = -i\vartheta +$$

$$+ lg\,\{a \cos\varphi\,\{(v + u)\, cotg\, \varphi + \sqrt{4uv + (u + v)^2 cot^2\, \varphi}\} + 2ua \sin\varphi\}$$

$$p_v = -\vartheta i - \int \frac{2u + (u + v)\, cot^2\, \varphi}{\sqrt{4uv + (u + v)^2 cot^2\, \varphi}}\, d\varphi = -i\vartheta +$$

$$+ lg\,\{a \cos\varphi\,\{(v + u)\, cotg\, \varphi + \sqrt{4uv + (u + v)^2 cot^2\, \varphi}\} + 2va \sin\varphi\}$$

(при надлежащемъ выборѣ постоянныхъ интегрированія). Отсюда мы найдемъ формулы:

---

[1]) Этотъ случай замѣченъ Д. Н. Горячевымъ (Моск. Сб. 1900 г.) Квадратуры его даны С. А. Чаплыгинымъ (Труды И. О. Л. Е. 1901 г.).

$$\left.\begin{aligned} e^{p_u+i\vartheta} &= a\cos\varphi\{(v+u)\cot g\,\varphi+\sqrt{4uv+(u+v)^2\cot^2\varphi}\}+2ua\sin\varphi \\ \text{и}\quad & \\ e^{p_v+i\vartheta} &= a\cos\varphi\{(v+u)\cot g\,\varphi+\sqrt{4uv+(u+v)^2\cot^2\varphi}\}+2vu\sin\varphi \end{aligned}\right\}\quad(39)$$

Отсюда:

$$\frac{e^{p_u}-e^{p_v}}{2a(v-u)} = -\sin\varphi e^{-\vartheta i} = -\sin\varphi\cos\vartheta + i\sin\varphi\sin\vartheta = \lambda_z + i\mu_z$$

и

$$\frac{(ve^{p_u}-ue^{p_v})\,e^{i\vartheta}}{a(v-u)\{(v+u)\cot g\,\varphi+\sqrt{4uv+(u+v)^2\cot g^2\varphi}\}} = \cos\varphi = \nu_z.$$

Но

$$\frac{e^{i\vartheta}}{a((v+u)\cot g\,\varphi+\sqrt{4uv+(u+v)^2\cot g^2\varphi})} = e^{-\frac{p_u+p_v}{2}},$$

такъ какъ, перемноживъ (39) мы найдемъ:

$$e^{2i\vartheta+p_u+p_v} = a^2((v+u)\cot\varphi+\sqrt{4uv+(u+v)^2\cot^2\varphi})^2.$$

Поэтому

$$1-\cos^2\varphi = 1-\nu_z^2 = \frac{e^{p_u}-e^{p_v}}{(u-v)^2}(u^2e^{-p_u}-v^2e^{-p_v})$$

и

$$\lambda_z - i\mu_z = \frac{1-\nu_z^2}{\lambda_z+i\mu_z} = \frac{e^{p_u}-e^{p_v}}{(u-v)^2}(u^2e^{-p_u}-v^2e^{-p_v}):\frac{e^{p_u}-e^{p_v}}{2a(v-u)} =$$

$$= -2a\frac{u^2e^{-p_u}-v^2e^{-p_v}}{u-v}$$

и слѣдовательно

$$-a\lambda_z = \frac{a}{2}\left\{\frac{1}{2a}\,\frac{e^{p_u}-e^{p_v}}{u-v}+2a\frac{u^2e^{-p_u}-v^2e^{-p_v}}{u-v}\right\}.$$

Поэтому уравненіе живой силы въ новыхъ перемѣнныхъ будетъ имѣть видъ:

$$-\frac{1}{2}\{u^2+uv+v^2\}+\frac{1}{4}\,\frac{e^{p_u}-e^{p_v}+4a^2(u^2e^{-p_u}-v^2e^{-p_v})}{u-v} = h$$

или

$$-(u^3-v^3)+\frac{1}{2}(e^{p_u}-e^{p_v}+4a^2(u^2e^{-p_u}-v^2e^{-p_v})) = 2h(u-v).$$

Уравненіе съ частными производными въ новыхъ перемѣнныхъ приметъ слѣдующій видъ:

$$\left(-u^3+\frac{1}{2}e^{\frac{\partial V}{\partial u}}+2a^2u^2e^{-\frac{\partial V}{\partial u}}-2hu\right)-\left(-v^3+\frac{1}{2}e^{\frac{\partial V}{\partial v}}+2a^2v^2e^{-\frac{\partial V}{\partial v}}-2hv\right)=0.$$

Для интегрированія этого уравненія мы можемъ положить

$$-u^3+\frac{1}{2}e^{\frac{\partial V}{\partial u}}+2a^2u^2e^{-\frac{\partial V}{\partial u}}-2hu=\Gamma$$

и

$$-v^3+\frac{1}{2}e^{\frac{\partial V}{\partial v}}+2a^2v^2e^{-\frac{\partial V}{\partial v}}-2hv=\Gamma,$$

откуда

$$\frac{\partial V}{\partial u}=lg\,(u^3+2hu+\Gamma+\sqrt{(u^3+2hu+\Gamma)^2-4a^2u^2})$$

$$\frac{\partial V}{\partial v}=lg\,(v^3+2hv+\Gamma+\sqrt{(v^3+2hv+\Gamma)^2-4a^2v^2})$$

Полный интегралъ представится тогда въ видѣ:

$$V=\int lg\,(u^3+2hu+\Gamma+\sqrt{(u^3+2hu+\Gamma)^2-4a^2u^2})\,du$$

$$+\int lg\,(v^3+2hv+\Gamma+\sqrt{(v^3+2hv+\Gamma)^2-4a^2v^2})\,dv.$$

Интегралы задачи о вращеніи тѣла представятся тогда въ видѣ:

$$\frac{\partial V}{\partial \Gamma}=\int\frac{du}{\sqrt{(u^3+2hu+\Gamma)^2-4a^2u^2}}+\int\frac{dv}{\sqrt{(v^2+2hv+\Gamma)^2-4a^2v^2}}=const.$$

$$\frac{\partial V}{\partial h}=\int\frac{2u\,du}{\sqrt{(u^3+2hu+\Gamma)^2-4a^2u^2}}+\int\frac{2v\,dv}{\sqrt{(v^2+2hv+\Gamma)^2-4a^2v^2}}=t-t_0$$

какъ они и были найдены при помощи 4-го алгебраическаго интеграла С. А. Чаплыгинымъ.

ГЛАВА V.

Видоизмѣненіе начала Гамильтона для частныхъ рѣшеній уравненій, ему соотвѣтствующихъ, къ тому же началу, но другой задачи.

Съ видоизмѣненіемъ функціи Лагранжа, о которомъ говорилось въ предыдущихъ главахъ, не слѣдуетъ смѣшивать тѣхъ случаевъ, когда для даннаго частнаго рѣшенія дифференціальныхъ уравненій динамики соотвѣтствующихъ нѣкоторой задачѣ, онѣ могутъ быть приведены къ дифференціальнымъ уравненіямъ, соотвѣтствующимъ частному рѣшенію другой задачи и слѣдовательно слѣдующихъ изъ начала Гамильтона въ другой формѣ

Предположимъ, что дифференціальныя уравненія какой-нибудь задачи механики при помощи ихъ частнаго рѣшенія приводятся къ дифференціальнымъ уравненіямъ, къ которому приводятся уравненія другой, болѣе

сложной задачи при помощи предположенія, что частное рѣшеніе старой задачи справедливо и для новой. Тогда мы заключимъ, что наше частное рѣшеніе—вмѣстѣ съ тѣмъ и рѣшеніе 2-й, болѣе трудной задачи.

I. Задача о вращеніи твердаго тѣла по инерціи вокругъ неподвижной точки приводится какъ извѣстно къ уравненіямъ

$$\left.\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} &= (B-C)\,qr \\ B\frac{dq}{dt} &= (C-A)\,rp \\ C\frac{dr}{dt} &= (A-B)\,pq \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

и допускаютъ частное рѣшеніе:

$$\lambda_z = \mu_z = 0 \quad \nu_z = 1 \quad p = q = 0 \quad r = r_0 \qquad (2)$$

(равномѣрное вращеніе около оси z-овъ, совпадающей съ осью инерціи Z).

Но при предположеніи (2) къ тѣмъ же уравненіямъ (1) приводятся дифференціальныя уравненія вращенія тяжелаго твердаго тѣла, центръ тяжести котораго лежитъ на OZ:

$$\left.\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} &= (B-C)\,qr - P\mu_z \\ B\frac{dq}{dt} &= (C-A)\,rp + P\lambda_z \\ C\frac{dr}{dt} &= (A-B)\,pq \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

и, слѣдовательно, уравненія (2) представляютъ вмѣстѣ съ тѣмъ частное рѣшеніе и уравненій (3).

II. Задача о движеніи гироскопа вращенія приводится къ уравненіямъ:

$$\left.\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} &= (A-C)\,qr - P\mu_z \\ A\frac{dq}{dt} &= (C-A)\,rp + P\lambda_z \\ C\frac{dr}{dt} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

допускающимъ интегралы:

$$\left.\begin{aligned} r &= \omega \\ A\,(p^2+q^2) + C\omega^2 &= 2P\nu_z + 2h \\ Ap\lambda_z + Aq\mu_z + C\omega\nu_z &= G \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Кромѣ того они допускаютъ еще при

$$C=2A \quad 2PG+C\omega(2h-C\omega^2)=0 \quad (\text{или } PG+C\omega(h-A\omega^2)=0) \quad (6)$$

интегралъ
$$\frac{q}{p}=const. \quad (7)$$

Въ самомъ дѣлѣ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{q}{p}\right)=\frac{1}{p^2}\left\{\omega(p^2+q^2)\frac{C-2A}{2A}+\frac{2GP-C\omega(C\omega^2-2h)}{2A^2}\right\},$$

откуда при условіяхъ (6) и слѣдуетъ интегралъ (7).

Замѣтимъ, что надлежащимъ поворотомъ осей неизмѣнно связанныхъ съ тѣломъ можно интегралъ (7) привести къ виду

$$q=0 \quad (8)$$

Тогда интегралы (5) примутъ видъ:

$$r=\omega$$
$$Ap^2+C\omega^2=2P\nu_z+2h$$
$$Ap\lambda_z=G-C\omega\nu_z.$$

Изъ послѣднихъ 2-хъ уравненій при помощи условія (6) получимъ

$$\lambda_z=-\frac{A}{P}\omega p \quad (9)$$

Но уравненія вращенія (3) при $q=0$ совпадаютъ съ уравненіями (4); слѣдовательно найденное рѣшеніе для гироскопа вращенія (которое можетъ быть доведено до конца при помощи эллиптическихъ функцій по извѣстнымъ формуламъ) есть вмѣстѣ съ тѣмъ и частное рѣшеніе уравненій (3), соотвѣтствующихъ болѣе общему случаю вращенія.

Этотъ случай вращенія тяжелаго тѣла былъ указанъ почти одновременно проф. Д. К. Бобылевымъ и проф. В. А. Стекловымъ.

Замѣтимъ, что случай вращенія симметричнаго гироскопа, къ которому приводится вращеніе тѣла въ этомъ случаѣ, характеризуется одною особенностью, на которую мы будемъ имѣть еще случай обратить вниманіе въ теоріи движенія твердаго тѣла въ жидкости.

Мы имѣемъ въ данномъ случаѣ по извѣстнымъ формуламъ (для случая движенія симметричнаго гироскопа):

$$\int_{(\nu_z)_0}^{\nu_z}\frac{d\nu_z}{\sqrt{R(\nu_z)}}=t \qquad ж=\int_0^t\frac{G-2A\omega\nu_z}{A(1-\nu_z^2)}dt$$

$$\varphi=\int_0^t\left\{\omega-\nu_z\frac{G-2A\omega\nu_z}{A(1-\nu_z^2)}\right\}dt=\int_0^t\frac{A\omega+A\omega\nu_z^2-G\nu_z}{1-\nu_z^2}\frac{d\nu_z}{\sqrt{R(\nu_z)}} \quad (10)$$

гдѣ $R(\nu_z)=2A(P\nu_z+h-A\omega^2)(1-\nu_z^2)-(G-2A\omega\nu_z)^2$.

Условія (6), при которыхъ существуетъ интегралъ (7) или (8), суть вмѣстѣ съ тѣмъ условія интегрируемости выраженія (10) *въ логариѳмахъ*.

Въ самомъ дѣлѣ имѣемъ:

$$\vartheta = -\frac{1}{i}\, lg - \frac{\lambda_z + i\mu_z}{\sin\phi} =$$

$$i\, lg - \frac{G - C\omega\nu_z + i\sqrt{\sin^2\phi\,(2PA\nu_z + (2h - C\omega^2)A) - (G - C\omega\nu_z)^2}}{\sin\phi\sqrt{2PA\cos\phi + (2h - C\omega^2)A}}$$

такъ какъ
$$\lambda_z = \frac{G - C\omega\nu_z}{\sqrt{2PA\nu_z + (2h - C\omega^2)A}},$$

$$\mu_z = \sqrt{1 - \cos^2\phi - \frac{(G - C\omega\nu_z)^2}{2PA\nu_z + (2h - C\omega^2)A}}$$

или
$$\vartheta = arc\cos\frac{C\omega\cos\phi - G}{\sin\phi\sqrt{2PA\cos\phi + (2h - C\omega^2)A}}.$$

Сравнивая это выраженіе съ (10) мы получаемъ:

$$\int_{(\nu_z)_0}^{\nu_z}\frac{A\omega + A\omega\nu_z^2 - G\nu_z}{1 - \nu_z^2}\,\frac{d\nu_z}{\sqrt{R(\nu_z)}} = arc\cos\frac{C\omega\cos\phi - G}{\sin\phi\sqrt{2PA\cos\phi + (2h - C\omega^2)A}}, \quad (11)$$

что провѣряется непосредственнымъ дифференцированіемъ, такъ какъ

$$\int_{z_0}^{z}\frac{(A\omega + A\omega z^2 - Gz)\,dz}{(1 - z^2)\sqrt{2A(Pz + h - A\omega^2)(1 - z^2) - (G - 2A\omega z)^2}} =$$

$$= arc\cos\frac{C\omega z - G}{\sqrt{(1 - z^2)(2PAz + (2h - C\omega^2)A)}} + const$$

а кромѣ того, очевидно изъ (9), такъ какъ оттуда слѣдуетъ

$$\lambda_z^2 = \frac{\omega}{P}(C\omega\nu_z - G)$$

или
$$\sin^2\phi\cos^2\vartheta = \frac{\omega}{P}(C\omega\cos\phi - G)$$

и
$$\cos\vartheta = \sqrt{\frac{\omega}{P}}\,\frac{\sqrt{C\omega\cos\phi - G}}{\sin\phi} \quad (12)$$

что и совпадаетъ съ (11), такъ какъ, вставляя тамъ

$$(2h - C\omega^2)A = -\frac{PG}{\omega},$$ найдемъ (12).

ГЛАВА VI.

Задача о движенiи твердаго тѣла въ несжимаемой идеальной жидкости.

Задача о движенiи твердаго тѣла въ несжимаемой идеальной жидкости приведена Киргоффомъ къ 6-ти дифференцiальнымъ уравненiямъ, соотвѣтствующимъ началу Гамильтона

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T + U)\, dt = 0 \tag{1}$$

гдѣ U — потенцiалъ внѣшнихъ силъ дѣйствующихъ на тѣло, T — однородная функцiя 2-ой степени отъ проекцiй p, q, r угловой скорости тѣла на неизмѣнно съ нимъ связанныя оси и отъ проекцiй u, v, w на тѣ же оси скорости начала ихъ координатъ. Получаемые при этомъ шесть дифференцiальныхъ уравненiй допускаютъ при $U = 0$ кромѣ интеграла живыхъ силъ $T = h$ еще 2 очевидныхъ интеграла:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial w}\right)^2 = J^2 \tag{2}$$

и

$$\frac{\partial T}{\partial u} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} + \frac{\partial T}{\partial v} \cdot \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial T}{\partial w} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} = JJ_1 \tag{3}$$

выражающихъ постоянство главнаго вектора количествъ движенiя тѣла и жидкости и постоянство проекцiи главнаго момента на главный векторъ.

Главный векторъ сохраняетъ свою величину и свое направленiе въ пространствѣ. Примемъ за ось z-овъ прямую, параллельную этому направленiю, и положенiе твердаго тѣла въ пространствѣ будемъ опредѣлять 3-мя Эйлеровыми углами $\varkappa$, ϑ, φ образованными неизмѣнно связанными съ тѣломъ осями съ 3-мя неподвижными осями (изъ которыхъ Oz, какъ замѣчено выше, совпадаетъ съ направленiемъ главнаго вектора). Въ такомъ случаѣ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial u} &= J\lambda_z = -J \sin\vartheta \cos\varphi \\ \frac{\partial T}{\partial v} &= J\mu_z = J \sin\vartheta \sin\varphi \\ \frac{\partial T}{\partial w} &= J\nu_z = J \cos\vartheta \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

такъ что:

$$J^2 = \left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial w}\right)^2 \tag{5}$$

Мы имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} u &= x'_{ю}\lambda_x + y'_{ю}\lambda_y + z'_{ю}\lambda_z \\ v &= x'_{ю}\mu_x + y'_{ю}\mu_y + z'_{ю}\mu_z \\ w &= x'_{ю}\nu_x + y'_{ю}\nu_y + z'_{ю}\nu_z \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Замѣтимъ, что, если въ начало Гамильтона мы введемъ наши Эйлеровы углы, дифференціальныя уравненія, изъ него получаемыя, будутъ имѣть интегралы:

$$\frac{\partial T}{\partial ж'} = const. \quad (7)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z'_{ю}} = const., \quad (8)$$

такъ какъ

$$U = 0 \quad \frac{\partial T}{\partial ж} = 0 \quad \frac{\partial T}{\partial z_{ю}} = 0 \ *)$$

или

$$\frac{\partial T}{\partial ж'} = \frac{\partial T}{\partial p}\lambda_z + \frac{\partial T}{\partial q}\mu_z + \frac{\partial T}{\partial r}\nu_z = const.$$

и

$$\frac{\partial T}{\partial z'_{ю}} = \frac{\partial T}{\partial u}\lambda_z + \frac{\partial T}{\partial v}\mu_z + \frac{\partial T}{\partial w}\nu_z = const.,$$

которые при помощи (4) приведутся къ (3) и (2), такъ что

$$J\frac{\partial T}{\partial ж'} = JJ_1 \quad (9) \qquad \text{или} \quad \frac{\partial T}{\partial ж'} = J_1 \quad (9^*)$$

$$J\frac{\partial T}{\partial z'_{ю}} = J^2 \quad (10) \qquad \frac{\partial T}{\partial z'_{ю}} = J \quad (10^*)$$

Видоизмѣнимъ теперь Лагранжевскую функцію при помощи интеграловъ (9) и (10); мы найдемъ:

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\left(T - J_1\frac{dж}{dt} - J\frac{dz_{ю}}{dt}\right)dt = 0 \quad (11)$$

Ось Z неизмѣнно связанная съ тѣломъ можетъ быть взята какъ угодно, точка $Ю$ въ тѣлѣ можетъ быть также выбрана какъ угодно. Мы получаемъ такимъ образомъ слѣдующее предложеніе доказанное H. Minkowski.

---

*) $\frac{\partial T}{\partial z_{ю}} = 0$ очевидно, а

$$\frac{\partial T}{\partial ж} = \frac{\partial T}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial ж} + \frac{\partial T}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial ж} + \frac{\partial T}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial ж} = J\left(\lambda_z\frac{\partial\lambda_x}{\partial ж} + \mu_z\frac{\partial\mu_x}{\partial ж} + \nu_z\frac{\partial\nu_x}{\partial ж}\right)x'_{ю}$$

$$+ J\left(\lambda_z\frac{\partial\lambda_y}{\partial ж} + \mu_z\frac{\partial\mu_y}{\partial ж} + \nu_z\frac{\partial\nu_y}{\partial ж}\right)y'_{ю} = 0,$$

такъ какъ

$$\frac{\partial\lambda_x}{\partial ж} = -\lambda_y, \quad \frac{\partial\lambda_y}{\partial ж} = \lambda_x, \quad \frac{\partial\mu_x}{\partial ж} = -\mu_y, \quad \frac{\partial\mu_y}{\partial ж} = \mu_x, \quad \frac{\partial\nu_x}{\partial ж} = -\nu_y, \quad \frac{\partial\nu_y}{\partial ж} = \nu_x.$$

Введемъ въ уравненія Киргоффа новыя перемѣнныя $\frac{\partial T}{\partial u}, \frac{\partial T}{\partial v}, \frac{\partial T}{\partial w}$ вмѣсто u, v, w и ихъ опять замѣнимъ 2-мя новыми перемѣнными e_1, e_2, удовлетворяющими тождественно уравненію:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial w}\right)^2 = J^2$$

(напр. φ и ϑ).

Выразимъ тогда при помощи 3-хъ изъ уравненій Киргоффа p, q, r черезъ e_1 и e_2 (воспользовавшись интеграломъ (3)) и ихъ производныя e_1', e_2'. Подставивъ эти p, q, r въ 3 остальныя уравненія, мы найдемъ 2 уравненія 2-го порядка, которымъ можно дать слѣдущую интерпретацію:

Возьмемъ въ тѣлѣ какую-нибудь точку и какую-нибудь прямую. Пусть за время dt проекція перемѣщенія взятой нами точки на направленіе главнаго вектора будетъ $d\sigma$, а $d\sigma_1$ будетъ уголъ поворота взятаго направленія вокругъ направленія главнаго вектора.

Величины e_1 и e_2 тогда будутъ такія функціи отъ времени, что первая варіація отъ интеграла

$$\Phi = \int_{t_0}^{t_1} T dt - J d\sigma - J_1 d\sigma_1 \tag{12}$$

равна 0.

Если по отношенію къ нѣкоторой неизмѣнно связанной съ тѣломъ системѣ координатъ черезъ $a, b, c \ldots$ обозначимъкоординаты взятой точки, а черезъ $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ косинусы угловъ, образуемыхъ взятымъ направленіемъ съ этими осями, то

$$\left.\begin{aligned} d\sigma &= \frac{1}{J}\left\{\frac{\partial T}{\partial u}(u + cq - br) + \frac{\partial T}{\partial v}(v + ar - cp) + \frac{\partial T}{\partial w}(w + bp - aq)\right\} dt \\ d\sigma_1 &= J \frac{p\frac{\partial T}{\partial u} + q\frac{\partial T}{\partial v} + r\frac{\partial T}{\partial w} - \left(\alpha\frac{\partial T}{\partial u} + \beta\frac{\partial T}{\partial v} + \gamma\frac{\partial T}{\partial w}\right)(\alpha p + \beta q + \gamma r)}{\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial w}\right)^2 - \left(\alpha\frac{\partial T}{\partial u} + \beta\frac{\partial T}{\partial v} + \gamma\frac{\partial T}{\partial w}\right)^2} dt \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Такимъ образомъ задача сведется къ интегрированію дифференціальныхъ уравненій для e_1 и e_2, которыя можно по пріему Гамильтона-Якоби свести къ интегрированію дифференціальнаго уравненія съ частными производными, а именно, обозначивъ

$$T - J\frac{d\sigma}{dt} - J_1\frac{d\sigma_1}{dt} = \Phi, \text{ получимъ } \frac{\partial \Phi}{\partial e_1'} = f_1, \frac{\partial \Phi}{\partial e_2'} = f_2.$$

Пусть $\quad f_1 e_1' + f_2 e_2' - \Phi = \psi\,(e_1, e_2, f_1, f_2, J, J_1).$

Дифференціальныя уравненія для e_1, e_2, f_1, f_2 будутъ тогда имѣть видъ

$$dt : de_1 : de_2 : df_1 : df_2 = 1 : \frac{\partial \psi}{\partial f_1} : \frac{\partial \psi}{\partial f_2} : -\frac{\partial \psi}{\partial e_1} : -\frac{\partial \psi}{\partial e_2} \tag{14}$$

Уравненіе $T=h$ переходитъ въ $\psi=h$, которое и представляетъ уравненіе съ частными производными подлежащее интегрированію. Найдя рѣшеніе этого дифференціальнаго уравненія, содержащее одно постоянное M мы найдемъ интегралы системы уравненій (14) въ видѣ:

$$\frac{\partial\psi}{\partial h} = t - t_0 \qquad \frac{\partial\psi}{\partial M} = const.$$

Замѣтимъ, что уравненіе (11) соотвѣтствуетъ minimum'у интеграла (12), который по формулѣ (13) мы напишемъ ($a=b=c=0$, $\gamma=1$, $\alpha=\beta=0$) въ видѣ

$$\int\limits_0^t \left\{ T - JJ_1 \frac{\frac{\partial T}{\partial u} p + \frac{\partial T}{\partial v} q}{\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2} - J.\frac{1}{J}\left(u\frac{\partial T}{\partial u} + v\frac{\partial T}{\partial v} + w\frac{\partial T}{\partial w}\right)\right\} dt$$

и слѣдовательно уравненіе (11) будетъ имѣть видъ:

$$\delta\int\limits_0^t \left(T - JJ_1 \frac{\frac{\partial T}{\partial u} p + \frac{\partial T}{\partial v} q}{\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2} - \left(u\frac{\partial T}{\partial u} + v\frac{\partial T}{\partial v} + w\frac{\partial T}{\partial w}\right)\right) dt = 0.$$

Подставивъ въ это уравненіе вмѣсто параметровъ e_1 и e_2 углы ϑ и φ мы найдемъ

$$\delta\int\limits_0^t \left\{ T - J_1 \frac{\lambda_z p + \mu_z q}{\sin^2\varphi} - \left(u\frac{\partial T}{\partial u} + v\frac{\partial T}{\partial v} + w\frac{\partial T}{\partial w}\right)\right\} dt = 0 \qquad (15)$$

Здѣсь въ T вмѣсто u, v, w должны быть поставлены λ_z, μ_z, ν_z при помощи уравненій

$$\frac{\partial T}{\partial u} = J\lambda_z, \quad \frac{\partial T}{\partial v} = J\mu_z, \quad \frac{\partial T}{\partial w} = J\nu_z;$$

u, v, w будутъ линейными функціями отъ λ_z, μ_z, ν_z, а T приметъ видъ T_2+T_0, гдѣ T_2 однородная функція 2-ой степени отъ p, q, r, а T_0 однородная функція 2-ой степени отъ λ_z, μ_z, ν_z. Пусть

$$2T_2 = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + Dpq + \ldots.$$

Примемъ за оси неизмѣнно связанныя съ тѣломъ главныя оси эллипсоида

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + \ldots = const.$$

Тогда T_2 можно будетъ написать въ видѣ:

$$2T_2 = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2.$$

Легко видѣть, что [illegible] въ интегралѣ [illegible] выполнены Лежандровы условія minimum'a. Въ самомъ дѣлѣ, дифференцируя уравненіе

$$\frac{dT}{dw} = \frac{dT}{d\theta}\,[illegible] + \frac{dT}{d\varphi}\,[illegible] + \frac{dT}{d\psi}\,[illegible] = [illegible]$$

по θ и по φ, мы найдемъ

$$\frac{dw}{d\theta} = -\frac{C\cos\theta}{\Delta}$$

$$\frac{dw}{d\varphi} = -\frac{\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi\,(B-A)}{\Delta}$$

гдѣ $\Delta = A\sin^2\theta\cos^2\varphi + B\sin^2\theta\sin^2\varphi + C\cos^2\theta$.

Имѣемъ:

$$\frac{d^2T}{d\theta^2} = \frac{d^2T_1}{d\theta^2} = \frac{d^2T_1}{dw^2}\,[illegible]\,\frac{dw}{d\theta} =$$

$$= \frac{C(A\sin^2\theta\cos^2\varphi + B\sin^2\theta\sin^2\varphi)}{A\sin^2\theta\cos^2\varphi + B\sin^2\theta\sin^2\varphi + C\cos^2\theta}.$$

Точно также найдемъ

$$\frac{d^2T}{d\varphi^2} = \frac{d^2T_1}{d\varphi^2} = \frac{BC\cos^2\theta\cos^2\varphi + AC\sin^2\varphi\cos^2\theta + AB\sin^2\theta}{A\sin^2\theta\cos^2\varphi + B\sin^2\theta\sin^2\varphi + C\cos^2\theta}$$

$$\frac{d^2T}{d\theta\,d\varphi} = \frac{d^2T_1}{d\theta\,d\varphi} = \frac{C(A-B)\sin\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta}{A\sin^2\theta\cos^2\varphi + B\sin^2\theta\sin^2\varphi + C\cos^2\theta}.$$

Эти выраженія совпадаютъ съ соотвѣтствующими выраженіями при изслѣдованіи minimum'a въ задачѣ главы II (стр. 15 и 16), и потому мы и здѣсь можемъ сдѣлать такое же заключеніе, какъ и тамъ, а именно, что интегралъ ([illegible]) дѣйствительно для даннаго движенія minimum.

Мы предположили, что оси координатъ, неизмѣнно связанныхъ съ тѣломъ, совпадаютъ съ осями инерціи, но подобно тому, какъ это сдѣлано въ главѣ II, результатъ неизмѣнно сохраняется и при какомъ угодно положеніи осей.

Точно также, аналогично изслѣдованію на стр. 19 и 20, мы убѣдимся, что интегралъ ([illegible]) будетъ minimum, если исключить изъ него t (при помощи интеграла живой силы по формуламъ на стр. 19 и 20) и распространить этотъ интегралъ между какими нибудь двумя опредѣленными положеніями тѣла (предѣльными), аналогично началу наименьшаго дѣйствія въ формѣ Лагранжа. Такимъ образомъ мы имѣемъ minimum въ теоремѣ Minkowsk'аго не только въ формѣ Лагранжа (въ которой его указываетъ самъ авторъ), но и въ формѣ Гамильтона.

Мы сдѣлаемъ теперь слѣдующее, весьма важное замѣчаніе. Вмѣсто

того, чтобы видоизмѣнять Лагранжевскую функцію при помощи 2-хъ интеграловъ (9*) и (10*), можно, остановившись на половинѣ этого преобразованія, преобразовать ее при помощи одного интеграла (10*). Видоизмѣненная функція Лагранжа будетъ тогда имѣть видъ:

$$T - J\frac{dz_w}{dt}$$

или вообще

$$T - J\frac{d\sigma}{dt},$$

гдѣ

$$d\sigma = \frac{1}{J}\left\{\frac{\partial T}{\partial u}(u + cq - br) + \frac{\partial T}{\partial v}(v + ar - cp) + \frac{\partial T}{\partial w}(w + bp - aq)\right\} dt,$$

такъ что напр. положивъ $a = b = c = 0$, мы найдемъ эту функцію въ видѣ:

$$T - u\frac{\partial T}{\partial u} - v\frac{\partial T}{\partial v} - w\frac{\partial T}{\partial w}. \tag{16}$$

Въ этомъ уравненіи $\frac{\partial T}{\partial u}$, $\frac{\partial T}{\partial v}$, $\frac{\partial T}{\partial w}$ связаны уравненіемъ

$$\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial w}\right)^2 = J^2$$

и потому вмѣсто $\frac{\partial T}{\partial u}$, $\frac{\partial T}{\partial v}$, $\frac{\partial T}{\partial w}$ мы можемъ взять

$$J\lambda_z, \; J\mu_z, \; J\nu_z. \tag{17}$$

Подставивъ ихъ въ (16), мы найдемъ ее въ видѣ

$$T - Ju\lambda_z - Jv\mu_z - Jw\nu_z.$$

Взявъ вмѣсто u, v, w ихъ выраженія черезъ $\frac{\partial T}{\partial u}$, $\frac{\partial T}{\partial v}$, $\frac{\partial T}{\partial w}$ и замѣнивъ послѣднія черезъ (17), мы приведемъ задачу къ виду, совершенно аналогичному задачѣ о вращеніи тяжелаго тѣла, имѣющаго потенціалъ, вокругъ неподвижной точки, а именно къ виду:

$$\delta\int_0^t \psi\, dt = 0,$$

гдѣ

$$\psi = f(p, q, r, \lambda_z, \mu_z, \nu_z)$$

и равна (16), въ которую вмѣсто u, v, w введены λ_z, μ_z, ν_z при помощи формулъ

$$J\lambda_z = \frac{\partial T}{\partial u}$$

$$J\mu_z = \frac{\partial T}{\partial v}$$

$$J\nu_z = \frac{\partial T}{\partial w}.$$

Такимъ образомъ къ 2-мъ извѣстнымъ каноническимъ видамъ дифференціальныхъ уравненій движенія твердаго тѣла въ несжимаемой идеальной жидкости безъ внѣшнихъ силъ:

$$1)\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right) - r\frac{\partial T}{\partial v} + q\frac{\partial T}{\partial w} = 0$$

. . . .

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right) - r\frac{\partial T}{\partial q} + q\frac{\partial T}{\partial r} - w\frac{\partial T}{\partial v} + v\frac{\partial T}{\partial w} = 0$$

. . . .

(Киргоффа).

$$2)\quad \frac{dx_1}{dt} = x_2\frac{\partial T}{\partial y_3} - x_3\frac{\partial T}{\partial y_2} \qquad\qquad x_1 = \frac{\partial T}{\partial u}, \dots$$

. . . .

$$\frac{dy_1}{dt} = x_2\frac{\partial T}{\partial x_3} - x_3\frac{\partial T}{\partial x_2} + y_2\frac{\partial T}{\partial y_3} - y_3\frac{\partial T}{\partial y_2} \qquad\qquad y_1 = \frac{\partial T}{\partial p}, \dots$$

. . . .

(Клебша)

мы можемъ прибавить видъ уравненій (промежуточный между ними)

$$3)\quad \frac{d\dfrac{\partial\psi}{\partial p}}{dt} = r\frac{\partial\psi}{\partial q} - q\frac{\partial\psi}{\partial r} + \nu_z\frac{\partial\psi}{\partial\mu_z} - \mu_z\frac{\partial\psi}{\partial\nu_z}$$

. . . .

$$\frac{d\lambda_z}{dt} = r\mu_z - q\nu_z,$$

. . . .

гдѣ

$$\psi = T - Ju\lambda_z - Jv\mu_z - Jw\nu_z,$$

а u, v, w исключены при помощи уравненій

$$\frac{\partial T}{\partial u} = J\lambda_z,\quad \frac{\partial T}{\partial v} = J\mu_z,\quad \frac{\partial T}{\partial w} = J\nu_z,$$

аналогичный виду уравненій вращенія тѣла вокругъ неподвижной точки подъ вліяніемъ силъ, имѣющихъ потенціалъ $U = f(\lambda_z, \mu_z, \nu_z)$.

Если T представляетъ сумму 2-хъ функцій, изъ которыхъ первая T_1 однородная функція 2-ой степени относительно p, q, r, не содержащая u, v, w, а вторая, T_2, однородная функція 2-ой степени однихъ u, v, w, то

$$\psi = T - u\frac{\partial T}{\partial u} - v\frac{\partial T}{\partial v} - w\frac{\partial T}{\partial w} = T_1 + T_2 - 2T_2 = T_1 - T_2$$

и наши дифференціальныя уравненія приведутся къ дифференціальнымъ уравненіямъ вращенія твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки, живая сила котораго T_1, подъ вліяніемъ силъ, имѣющихъ потенціалъ $-T_2$. Таковъ напр. случай движенія твердаго тѣла въ жидкости, когда живая сила имѣетъ видъ

$$2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + A_1u^2 + B_1v^2 + C_1w^2,$$

т. е. случай тѣла съ 3-мя осями симметріи (взаимно $\perp$-ми), принятыми за неизмѣнно связанныя съ тѣломъ оси координатъ.

Задача приводится здѣсь къ задачѣ о вращеніи тѣла, живая сила котораго $Ap^2 + Bq^2 + Cr^2$, вокругъ неподвижной точки (принятой за начало координатъ осей неизмѣнно связанныхъ съ тѣломъ) подъ вліяніемъ силъ имѣющихъ потенціалъ

$$-(A_1\lambda_z^2 + B_1\mu_z^2 + C_1\nu_z^2) \,.\, J^2.$$

На этомъ основаніи, между прочимъ, задача Brun'а, о которой мы упоминали на стр. 26, приводится къ задачѣ о движеніи твердаго тѣла въ жидкости въ случаѣ Клебша [1]), а частный случай ея, рѣшеніе котораго можетъ быть найдено при помощи указанныхъ на стр. 25 формулъ (при постоянной площадей $= 0$) совпадаетъ съ случаемъ Вебера, рѣшеніе котораго помѣщено въ XIV томѣ Math. Ann.

Однимъ изъ важныхъ преимуществъ 3-го вида уравненій (только что указаннаго) является удобство приложенія къ этому виду теоріи Гамильтона-Якоби о приведеніи интегрированія дифференціальныхъ уравненій механики къ интегрированію уравненія съ частными производными.

Мы должны для этого въ интегралъ живой силы, соотвѣтствующій разсматриваемому движенію, ввести вмѣсто $э'$, $ф'$, $ж'$ выраженія $p_э = \frac{\partial\psi}{\partial э'}$, $p_ф = \frac{\partial\psi}{\partial ф'}$, $p_ж = \frac{\partial\psi}{\partial ж'}$. Легко убѣдиться, что для этого достаточно въ Клебшевское выраженіе живой силы T въ перемѣнныхъ x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 ввести вмѣсто x_1, x_2, x_3 ихъ выраженія:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= J\lambda_z \\ x_2 &= J\mu_z \\ x_3 &= J\nu_z \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

а вмѣсто y_1, y_2, y_3 ихъ выраженія (стр. 15):

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \frac{\partial T}{\partial p} = p_ф \sin э - \frac{\cos э\,(p_ж - p_э \cos ф)}{\sin ф} \\ y_2 &= \frac{\partial T}{\partial q} = \frac{(p_ж - p_э \cos ф) \sin э}{\sin ф} + p_ф \cos э \\ y_3 &= \frac{\partial T}{\partial r} = p_э \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

[1]) Math. Ann. III. Совпаденіе задачи Brun'а съ задачею Weber'а, на которое мы имѣли случай указать въ засѣданіи С.-Петербургскаго Мат. Общества въ октябрѣ 1901 года замѣчено также В. А. Стекловымъ. „Remarque sur un problème de Clebsh...“ Journal de Mathématiques 1903). Связь задачи Weber'а съ движеніемъ точки по эллипсоиду, вытекающая непосредственно и изъ теоремъ Минковскаго повидимому замѣчена также С. А. Чаплыгинымъ и служила предметомъ его сообщенія въ Московскомъ Мат. Об. какъ видно изъ его письма ко мнѣ въ 1901 г.

Напр. разсмотримъ для примѣра случай Halphen'a вращенія тѣла въ жидкости, представляющій обобщеніе случая Киргоффа (тѣла вращенія).

Мы имѣемъ въ этомъ случаѣ выраженіе живой силы въ формѣ Клебша въ видѣ [1]):

$$T = \frac{1}{2} p\,(x_1^2 + x_2^2) + \frac{1}{2} p' x_3^2 + q\,(x_1 y_1 + x_2 y_2) + q' x_3 y_3 +$$

$$+ \frac{1}{2} r\,(y_1^2 + y_2^2) + \frac{1}{2} r' y_3^2 = h \tag{20}$$

Составимъ по формуламъ (18) и (19):

$$x_1^2 + x_2^2 = J^2(\lambda_z^2 + \mu_z^2) = J^2(1 - \nu_z^2)$$

$$x_3^2 = J^2 \nu_z^2$$

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 = -J \sin\text{ф} \cos\text{э} \left(p_{\text{ф}} \sin\text{э} - \frac{\cos\text{э}\,(p_{\text{ж}} - p_{\text{э}} \cos\text{ф})}{\sin\text{ф}}\right) +$$

$$+ J \sin\text{ф} \sin\text{э} \left(\frac{(p_{\text{ж}} - p_{\text{э}} \cos\text{ф}) \sin\text{э}}{\sin\text{ф}} + p_{\text{ф}} \cos\text{э}\right) = J\,(p_{\text{ж}} - p_{\text{э}} \cos\text{ф})$$

$$x_3 y_3 = J \nu_z p_{\text{э}}$$

$$y_1^2 + y_2^2 = p_{\text{ф}}^2 + \frac{(p_{\text{ж}} - p_{\text{э}} \cos\text{ф})^2}{\sin^2\text{ф}}\,.$$

Уравненіе съ частными производными $p_{\text{ф}} = \frac{\partial V}{\partial \text{ф}}$, $p_{\text{э}} = \frac{\partial V}{\partial \text{э}}$, $p_{\text{ж}} = \frac{\partial V}{\partial \text{ж}}$, получаемое изъ (20) поэтому будетъ;

$$T = \frac{1}{2} pJ^2 (1 - \cos^2\text{ф}) + \frac{1}{2} p' J^2 \cos^2\text{ф} + qJ\,(p_{\text{ж}} - p_{\text{э}} \cos\text{ф}) +$$

$$+ Jq' \cos\text{ф}\, p_{\text{э}} + \frac{1}{2} r \left(p_{\text{ф}}^2 + \frac{(p_{\text{ж}} - p_{\text{э}} \cos\text{ф})^2}{\sin^2\text{ф}}\right) + \frac{1}{2} r' p_{\text{э}}^2 = h.$$

Очевидны интегралы:

$$p_{\text{ж}} = const = \frac{1}{J}\, n$$

$$p_{\text{э}} = const = (y_3)_0 = y_3.$$

Остается уравненіе

$$\frac{1}{2} pJ^2 (1 - \cos^2\text{ф}) + \frac{1}{2} p' J^2 \cos^2\text{ф} + qJ\left(\frac{1}{J}\, n - y_3 \cos\text{ф}\right) + Jq' \cos\text{ф}\, y_3 +$$

$$+ \frac{1}{2} r \left(p_{\text{ф}}^2 + \frac{\left(\frac{1}{J}\, n - y_3 \cos\text{ф}\right)^2}{\sin^2\text{ф}}\right) + \frac{1}{2} r' y_3^2 = h$$

---

[1]) Halphen. Traité de fonctions elliptiques II page 149.

откуда

$$V = \sqrt{\frac{2}{r}} \int \sqrt{h - L - r\frac{E^2}{2\sin^2 \phi}}\, d\phi,$$

гдѣ

$$E = \frac{n}{J} - y_3 \cos\phi$$

$$L = \frac{1}{2} r' y_3^2 + Jq' \cos\phi y_3 + qJE + \frac{1}{2} p' J^2 \cos^2\phi + \frac{1}{2} pJ^2 (1 - \cos^2\phi)$$

и одинъ изъ интеграловъ движенія будетъ:

$$\frac{\partial V}{\partial h} = t - t_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{r}} \int \frac{\sin\phi\, d\phi}{\sqrt{(h - L)\sin^2\phi - \frac{rE^2}{2}}}$$

или

$$\left(\frac{d\nu_z}{dt}\right)^2 = \{2rh - rr'y_3^2 - 2rJq'\nu_z y_3 - 2rqJ\left(\frac{n}{J} - y_3\nu_z\right) - p'rJ^2\nu_z^2 -$$
$$- prJ^2(1 - \nu_z^2)\}(1 - \nu_z^2) - r^2\left(\frac{n}{J} - y_3\nu_z\right)^2,$$

откуда для x_3 получается выраженіе

$$\left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2 = r(p' - p)(m_1 - Hx_3 - x_3^2)(J^2 - x_3^2) - r^2(n - y_3x_3)^2,$$

гдѣ

$$H = 2\frac{q - q'}{p - p'} y_3, \quad m_1 = \frac{pJ^2 + 2qn + r'y_3^2 - 2h}{p - p'},$$

которое и найдено Halphen'омъ. Точно также найдемъ остальные 2 интеграла, положивъ $\frac{\partial V}{\partial n} = \text{const}$ и $\frac{\partial V}{\partial y_3} = \text{const}$, также совпадающіе съ интегралами Halphen'a.

Другое приложеніе приведенія задачи о движеніе твердаго тѣла въ жидкости къ уравненію съ частными производными мы сдѣлаемъ къ выводу теоремы С. А. Чаплыгина, что при существованіи линейнаго частнаго рѣшенія дифференціальныхъ уравненій движенія тѣла движеніе нѣкоторой оси въ тѣлѣ происходитъ такъ, какъ будто бы эта ось была осью симметріи.

Въ самомъ дѣлѣ, линейный частный интегралъ мы всегда надлежажимъ поворотомъ осей, какъ показалъ С. А. Чаплыгинъ, можемъ привести къ виду

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0$$

или

$$p_э = 0$$

а въ такомъ случаѣ при предположеніи $p_э = 0$ изъ уравненія съ частными производными связывающаго $p_э$, p_ϕ, $p_ж$, ϕ, $ж$, $э$ долженъ исче-

знуть ϑ, т. е. въ этихъ предположеніяхъ движеніе оси Z совершается какъ будто бы эта ось была осью симметріи тѣла.

ГЛАВА VII.

Объ одномъ случаѣ движенія твердаго тѣла въ жидкости при существованіи дробныхъ раціональныхъ интеграловъ отъ u, v, w, p, q, r.

Возьмемъ случай Клебша движенія твердаго тѣла въ жидкости, когда

$$2T = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + b_1y_1^2 + b_2y_2^2 + b_3y_3^2,$$

гдѣ a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, связаны соотношеніемъ

$$a_1\left(\frac{1}{b_2}-\frac{1}{b_3}\right)+a_2\left(\frac{1}{b_3}-\frac{1}{b_1}\right)+a_3\left(\frac{1}{b_1}-\frac{1}{b_2}\right)=0. \qquad (1)$$

Дифференціальныя уравненія движенія въ этомъ случаѣ примутъ видъ:

$$\frac{dx_1}{dt} = b_3y_3x_2 - b_2y_2x_3$$

$$\frac{dx_2}{dt} = b_1y_1x_3 - b_3y_3x_1$$

$$\frac{dx_3}{dt} = b_2y_2x_1 - b_1y_1x_2$$

$$\frac{dy_1}{dt} = (a_3 - a_2)\, x_2x_3 + (b_3 - b_2)\, y_2y_3$$

$$\frac{dy_2}{dt} = (a_1 - a_3)\, x_3x_1 + (b_1 - b_3)\, y_3y_1$$

$$\frac{dy_3}{dt} = (a_2 - a_1)\, x_1x_2 + (b_2 - b_1)\, y_1y_2.$$

Эти дифференціальныя уравненія допускаютъ кромѣ основныхъ интеграловъ:

$$\left.\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= J^2 \\ x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 &= JJ_1 \\ T &= h \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

еще 4-й интегралъ Клебша:

$$b_1a_1y_1^2 + b_2a_2y_2^2 + b_3a_3y_3^2 - (a_2a_3x_1^2 + a_3a_1x_2^2 + a_1a_2x_3^2) = L.$$

Положимъ, что коэффиціенты a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 кромѣ приведен-

наго выше условія удовлетворяютъ еще условію

$$\frac{1}{b_3} = \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} \text{ [1]}. \tag{3}$$

Такъ какъ всѣ a и b должны быть положительны, это условіе требуетъ:

$$b_3 < b_1 \quad \text{и} \quad b_3 < b_2.$$

Изъ нашихъ условій между прочимъ слѣдуетъ:

$$\left.\begin{aligned} (a_3 - a_1)\, b_2 &= (a_3 - a_2)\, b_1 \\ (a_1 - a_2)\, b_2 &= (a_3 - a_2)\ (b_2 - b_1). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Пусть $a_3 > a_1$, тогда и $a_3 > a_2$ и введемъ вмѣсто x_1, x_2, y_1, y_2 новыя перемѣнныя

$$\xi_1 = \sqrt{a_3 - a_1}\, x_1 + \sqrt{b_2}\, y_2$$

$$\xi_2 = \sqrt{a_3 - a_2}\, x_2 + \sqrt{b_1}\, y_1$$

$$\eta_1 = \sqrt{a_3 - a_1}\, x_1 - \sqrt{b_2}\, y_2$$

$$\eta_2 = \sqrt{a_3 - a_2}\, x_2 - \sqrt{b_1}\, y_1.$$

Дифференціальныя уравненія примутъ въ новыхъ перемѣнныхъ слѣдующій видъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi_1}{dt} &= \sqrt{b_2(a_3 - a_1)}\, x_3\xi_1 - b_3\sqrt{\frac{b_1}{b_2}}\, y_3\xi_2 \\ \frac{d\xi_2}{dt} &= -\sqrt{b_1(a_3 - a_2)}\, x_3\xi_2 + b_3\sqrt{\frac{b_2}{b_1}}\, y_3\xi_1 \\ \frac{d\eta_1}{dt} &= -\sqrt{b_2(a_3 - a_1)}\, x_3\eta_1 - b_3\sqrt{\frac{b_1}{b_2}}\, y_3\eta_2 \\ \frac{d\eta_2}{dt} &= \sqrt{b_1(a_3 - a_2)}\, x_3\eta_2 + b_3\sqrt{\frac{b_2}{b_1}}\, y_3\eta_1 \\ 4\sqrt{b_1(a_3 - a_2)}\,\frac{dx_3}{dt} &= b_1(\xi_2^2 - \eta_2^2) - b_2(\xi_1^2 - \eta_1^2) \\ \frac{2\sqrt{b_1 b_2}}{b_1 - b_2}\,\frac{dy_3}{dt} &= -(\eta_1\xi_2 + \xi_1\eta_2) \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

а интегралы въ новыхъ перемѣнныхъ примутъ видъ:

$$b_2\xi_1\eta_1 + b_1\xi_2\eta_2 = I \tag{6$_a$}$$

---

[1]) Это условіе введено нами въ статьѣ „О нѣкоторыхъ частныхъ рѣшеніяхъ и т. д.“. Сборникъ Института Инж. Пут. Сообщ. 1899 г.

$$\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 = b_3 y_3^2 + \Gamma_1 \qquad (6_b)$$

$$b_1(\xi_2^2 + \eta_2^2) + b_2(\xi_1^2 + \eta_1^2) + 4(a_3 - a_1)\,b_2 x_3^2 = \Gamma_2 \qquad (6_c)$$

$$(b_1 + b_2)(\xi_1\xi_2 - \eta_1\eta_2) + (b_2 - b_1)(\xi_2\eta_1 - \xi_1\eta_2) +$$
$$+ 4b_1\sqrt{b_2(a_3 - a_2)}\,x_3 y_3 = \Gamma_3 \qquad (6_d)$$

гдѣ

$$\Gamma = \frac{b_2}{a_3 - a_2}\left(La_3 - 2h - J^2(a_3^2 + a_1 a_2)\right)$$

$$\Gamma_1 = J^2 a_3 - L$$

$$\Gamma_2 = 4(a_3 - a_1)\,b_2 J^2 - 2\Gamma$$

$$\Gamma_3 = 4JJ_1 b_1\sqrt{b_2(a_3 - a_2)}.$$

Мы покажемъ, что въ предположеніи $\Gamma = 0$ или

$$La_3 - 2h = J^2(a_3^2 + a_1 a_2),$$

(т. е. въ предположеніи не менѣе общемъ для даннаго случая, чѣмъ напр. предположеніе H. Weber'a: $\Gamma_3 = 0$) задача о вращеніи приводится къ эллиптическимъ функціямъ.

Обозначивъ:

$$z_1 = \xi_1\eta_1 \quad z_2 = \xi_2\eta_2$$

$$z_3 = \xi_1^2 + \eta_1^2 \quad z_4 = \xi_2^2 + \eta_2^2$$

$$u = \xi_1\xi_2 - \eta_1\eta_2 \quad v = \xi_2\eta_1 - \xi_1\eta_2$$

мы напишемъ интегралы ($6_{a,b,c,d}$) въ видѣ:

$$\left.\begin{aligned} b_2 z_1 + b_1 z_2 &= \Gamma \\ z_1 + z_2 &= b_3 y_3^2 + \Gamma_1 \\ b_1 z_4 + b_2 z_3 + 4(a_3 - a_1)\,b_2 x_3^2 &= \Gamma_2 \\ (b_1 + b_2)u + (b_2 - b_1)v + 4b_1\sqrt{b_2(a_3 - a_2)}\,x_3 y_3 &= \Gamma_3 \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Вслѣдствіе тождества

$$(\xi_1\xi_2 - \eta_1\eta_2)(\xi_2\eta_1 - \xi_1\eta_2)(b_1\xi_2\eta_2 - b_2\xi_1\eta_1) +$$
$$+ (\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2)(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1)(b_2\xi_1\eta_1 + b_1\xi_2\eta_2) =$$
$$= 2\xi_1\eta_1\xi_2\eta_2\left(b_1(\xi_2^2 + \eta_2^2) + b_2(\xi_1^2 + \eta_1^2)\right)$$

слѣдуетъ

$$b_1 z_4 + b_2 z_3 = \frac{uv(b_1 z_2 - b_2 z_1) + \Gamma\sqrt{(u^2 + 4z_1 z_2)(v^2 + 4z_1 z_2)}}{2z_1 z_2} \qquad (8)$$

Поэтому, исключая x_3 и y_3 изъ уравненій (7), находимъ уравненіе

$$4b_1b_2(z_1+z_2-\Gamma_1)\left(\Gamma_2-\frac{uv(b_1z_2-b_2z_1)+\Gamma\sqrt{(u^2+4z_1z_2)(v^2+4z_1z_2)}}{2z_1z_2}\right)=$$

$$=b_3(\Gamma_3-(b_1+b_2)u-(b_2-b_1)v)^2.$$

При $\Gamma=0$ это уравненіе упрощается къ виду

$$4b_1b_2(z_1+z_2-\Gamma_1)\left(\frac{\Gamma_2z_2+uvb_2}{z_2}\right)=b_3(\Gamma_3-(b_1+b_2)u-(b_2-b_1)v)^2 \qquad (9)$$

Кромѣ того на основаніи 1-го изъ уравненій (7) при $\Gamma=0$

$$b_2z_1+b_1z_2=0. \qquad (10)$$

Рѣшая уравненія (10) и (9) относительно z_1 и z_2 мы легко найдемъ

$$z_1=\frac{b_3(s_1-\Gamma_3)(s_2-\Gamma_3)+4b_1b_2\Gamma_1\Gamma_2\pm b_3\sqrt{(s_1-k_1)(s_1-k_2)(s_2-k_1)(s_2-k_2)}}{8b_2(b_1-b_2)\Gamma_2} \qquad (11)$$

$$z_2=\frac{b_3(s_1-\Gamma_3)(s_2-\Gamma_3)+4b_1b_2\Gamma_1\Gamma_2\pm b_3\sqrt{(s_1-k_1)(s_1-k_2)(s_2-k_1)(s_2-k_2)}}{8b_1(b_2-b_1)\Gamma_2}. \qquad (12)$$

Если изъ этихъ формулъ мы желаемъ перейти къ частнымъ случаямъ $\Gamma_1=0$ или $\Gamma_2=0$, мы должны передъ корнемъ удержать $+$ при $\Gamma_1=0$ и $-$ при $\Gamma_2=0$.

Здѣсь s_1 и s_2 даны уравненіями

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{s_1}&=\sqrt{(b_1+b_2)u}-\sqrt{(b_2-b_1)v}\\ \sqrt{s_2}&=\sqrt{(b_1+b_2)u}+\sqrt{(b_2-b_1)v}\end{aligned}\right\}. \qquad (13)$$

откуда

$$(b_1+b_2)u+(b_2-b_1)v=\frac{s_1+s_2}{2}$$

$$\frac{(s_2-s_1)^2}{16}=(b_2^2-b_1^2)uv \qquad (14)$$

$$\frac{s_2-s_1}{4}=\sqrt{(b_2^2-b_1^2)uv},$$

а

$$\left.\begin{aligned}k_1+k_2&=2\Gamma_3\\ k_1k_2&=\Gamma_3^2+4(b_1+b_2)\Gamma_1\Gamma_2\\ k_1&=\Gamma_3+2i\sqrt{(b_1+b_2)\Gamma_1\Gamma_2}\\ k_2&=\Gamma_3-2i\sqrt{(b_1+b_2)\Gamma_1\Gamma_2}\end{aligned}\right\}. \qquad (15)$$

Мы составимъ теперь дифференціальныя уравненія, которымъ удовлетворяютъ s_1 и s_2.

Мы имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{ds_1}{\sqrt{s_1}} &= \sqrt{(b_1+b_2)}\,\frac{du}{\sqrt{u}} - \sqrt{b_2-b_1}\,\frac{dv}{\sqrt{v}} \\ \frac{ds_2}{\sqrt{s_2}} &= \sqrt{(b_1+b_2)}\,\frac{du}{\sqrt{u}} + \sqrt{b_2-b_1}\,\frac{dv}{\sqrt{v}} \end{aligned}\right\}. \tag{16}$$

Но

$$\frac{du}{dt} = b_3y_3\left(\sqrt{\frac{b_2}{b_1}}\,\xi_1^2 - \sqrt{\frac{b_1}{b_2}}\,\xi_2^2\right) + b_3y_3\left(\sqrt{\frac{b_1}{b_2}}\,\eta_2^2 - \sqrt{\frac{b_2}{b_1}}\,\eta_1^2\right) =$$

$$= b_3y_3\left\{\sqrt{\frac{b_2}{b_1}}(\xi_1^2-\eta_1^2) + \sqrt{\frac{b_1}{b_2}}(\eta_2^2-\xi_2^2)\right\} =$$

$$= \frac{b_3y_3}{\sqrt{b_1b_2}}\left(b_2(\xi_1^2-\eta_1^2) - b_1(\xi_2^2-\eta_2^2)\right) = \frac{b_3y_3b_2u\,(\xi_2\eta_1+\xi_1\eta_2)}{\sqrt{b_1b_2}\,z_2}, \tag{17}$$

такъ какъ

$$u\,(\xi_2\eta_1+\xi_1\eta_2) = \xi_1\eta_1(\xi_2^2-\eta_2^2) + \xi_2\eta_2(\xi_1^2-\eta_1^2) =$$

$$= \{b_2(\xi_1^2-\eta_1^2) - b_1(\xi_2^2-\eta_2^2)\}\,\frac{z_2}{b_2}. \tag{18}$$

Точно также

$$\frac{dv}{dt} = -2\sqrt{b_2(a_3-a_1)}\,x_3\,(\xi_1\eta_2+\xi_2\eta_1).$$

Кромѣ того

$$x_3 = \frac{\sqrt{\Gamma_2+\frac{uvb_2}{z_2}}}{\sqrt{4(a_3-a_1)b_2}} = \frac{\sqrt{uvb_2+\Gamma_2z_2}}{\sqrt{4(a_3-a_1)b_2z_2}} = \frac{\sqrt{b_3}\,(\Gamma_3-(b_1+b_2)u-(b_2-b_1)v)}{2\sqrt{b_1b_2}\sqrt{z_1+z_2-\Gamma_1}\sqrt{4(a_3-a_1)b_2}}$$

$$y_3 = \sqrt{\frac{z_1+z_2-\Gamma_1}{b_3}}$$

$$\xi_1\eta_2+\xi_2\eta_1 = \sqrt{v^2+4z_1z_2}.$$

Поэтому уравненія (16) даютъ

$$\frac{ds_1}{\sqrt{s_1}} = \left\{\frac{b_3\sqrt{u}\,(\Gamma_3-(b_1+b_2)u-(b_2-b_1)v)^2}{4\sqrt{z_1+z_2-\Gamma_1}\,(\Gamma_2z_2+uvb_2)\,b_1} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{b_2-b_1}\,\frac{(\Gamma_3-(b_1+b_2)u-(b_2-b_1)v)\sqrt{b_3}}{2\sqrt{b_1b_2}\sqrt{z_1+z_2-\Gamma_1}\sqrt{v}}\right\}\sqrt{v^2+4z_1z_2}$$

$$\frac{ds_2}{\sqrt{s_2}} = \left\{\frac{b_3\sqrt{u}\,(\Gamma_3 - (b_1+b_2)\,u - (b_2-b_1)\,v)^2}{4\sqrt{z_1+z_2-\Gamma_1}\,(\Gamma_2 z_2 + uvb_2)\,b_1} - \right.$$

$$\left. - \sqrt{b_2-b_1}\,\frac{(\Gamma_3 - (b_1+b_2)\,u - (b_2-b_1)\,v)\sqrt{b_3}}{2\sqrt{b_1 b_2}\sqrt{z_1+z_2-\Gamma_1}\sqrt{v}}\right\}\sqrt{v^2+4z_1z_2}.$$

Но легко провѣрить, что

$$16b_1(\Gamma_2 z_2 + uvb_2) = \frac{b_3}{b_2-b_1}\left\{\sqrt{(s_1-k_1)(s_1-k_2)} \pm \sqrt{(s_2-k_1)(s_2-k_2)}\right\}^2$$

$$z_1+z_2-\Gamma_1 = \frac{b_3}{16\,b_1 b_2 \Gamma_2}\left\{\sqrt{(s_2-k_1)(s_1-k_2)} \pm \sqrt{(s_2-k_2)(s_1-k_2)}\right\}^2.$$

Поэтому мы найдемъ уравненія

$$\frac{ds_1}{\sqrt{s_1}} = \frac{b_2-b_1}{\sqrt{b_1+b_2}}\left\{\frac{(s_2-s_1)(2\Gamma_3-s_1-s_2)}{(\sqrt{(s_1-k_1)(s_1-k_2)} \pm \sqrt{(s_2-k_1)(s_2-k_1)})^2} + 1\right\}\frac{\sqrt{v^2+4z_1z_2}\left(\Gamma_3 - \frac{s_1+s_2}{2}\right)}{\sqrt{z_1+z_2-\Gamma_1}\,(\sqrt{s_2}-\sqrt{s_1})}$$

$$\frac{ds_2}{\sqrt{s_2}} = \frac{b_2-b_1}{\sqrt{b_1+b_2}}\left\{\frac{(s_2-s_1)(2\Gamma_3-s_1-s_2)}{(\sqrt{(s_1-k_1)(s_1-k_2)} \pm \sqrt{(s_2-k_1)(s_2-k_1)})^2} - 1\right\}\frac{\sqrt{v^2+4z_1z_2}\left(\Gamma_3 - \frac{s_1+s_2}{2}\right)}{\sqrt{z_1+z_2-\Gamma_1}\,(\sqrt{s_2}-\sqrt{s_1})}$$

или

$$\frac{ds_1}{\sqrt{s_1}} = 4\,(b_2-b_1)\,\frac{(2\,\Gamma_3-s_1-s_2)\sqrt{(s_1-k_1)(s_1-k_2)}}{(\sqrt{(s_1-k_1)(s_1-k_2)} \pm \sqrt{(s_2-k_1)(s_2-k_2)})}$$

$$\frac{\sqrt{\Gamma_2}\sqrt{v^2+4\,z_1z_2}}{(\sqrt{(s_1-k_1)(s_2-k_1)} \pm \sqrt{(s_1-k_2)(s_2-k_2)})}\;\frac{1}{\sqrt{s_2}-\sqrt{s_1}}$$

$$\frac{ds_2}{\sqrt{s_2}} = \mp 4(b_2-b_1)\,\frac{(2\Gamma_3-s_1-s_2)\sqrt{(s_2-k_1)(s_2-k_2)}}{(\sqrt{(s_1-k_1)(s_1-k_2)} \pm \sqrt{(s_2-k_1)(s_2-k_2)})}$$

$$\frac{\sqrt{\Gamma_2}\sqrt{v^2+4z_1z_2}}{(\sqrt{(s_1-k_1)(s_2-k_1)} \pm \sqrt{(s_1-k_2)(s_2-k_2)})}\;\frac{1}{\sqrt{s_2}-\sqrt{s_1}}.$$

Мы получаемъ отсюда уравненіе

$$\frac{ds_1}{\sqrt{s_1}\sqrt{(s_1-k_1)(s_1-k_2)}} + \frac{ds_2}{\sqrt{s_2}\sqrt{(s_2-k_1)(s_2-k_2)}} = 0$$

для верхнихъ знаковъ и уравненіе

$$\frac{ds_1}{\sqrt{s_1}\sqrt{(s_1-k_1)(s_1-k_2)}} - \frac{ds_2}{\sqrt{s_2}\sqrt{(s_2-k_1)(s_2-k_2)}} = 0$$

для нижнихъ знаковъ, совокупность которыхъ можно заключить въ одно уравненіе

$$\frac{ds_1^2}{s_1(s_1-k_1)(s_1-k_2)}-\frac{ds_2^2}{s_2(s_2-k_1)(s_2-k_2)}=0.$$

Интеграломъ этихъ дифференціальныхъ уравненій служитъ выраженіе

$$\frac{\sqrt{s_1}\sqrt{(s_2-k_1)(s_2-k_2)}\pm\sqrt{s_2}\sqrt{s_1-k_1)(s_1-k_2)}}{s_1s_2-k_1k_2}=const.$$

Умноживъ числитель на сопряженное съ нимъ выраженіе

$$\sqrt{s_1}\sqrt{(s_2-k_1)(s_2-k_2)}\mp\sqrt{s_2}\sqrt{(s_1-k_1)(s_1-k_2)}$$

мы приведемъ этотъ интегралъ къ виду

$$\frac{(\sqrt{s_1}+\sqrt{s_2})^2(s_1s_2+k_1k_2-2\Gamma_3\sqrt{s_1s_2})-\frac{16b_2(b_1-b_2)}{b_3}\Gamma_2\sqrt{s_1s_2}.z_1}{(s_2-s_1)^2}=const.$$

Выразимъ при помощи этого интеграла u черезъ z_1 или черезъ z_2; введя въ него вмѣсто s_1, s_2 ихъ выраженія мы найдемъ:

$$\frac{4(b_1+b_2)u(L^2-2\Gamma_3L+N)-M}{uv}=const, \qquad (19)$$

гдѣ

$$L=(b_1+b_2)u-(b_2-b_1)v,$$

$$N=\Gamma_3^2+4(b_1+b_2)\Gamma_1\Gamma_2,$$

$$M=16((b_1+b_2)u-(b_2-b_1)v)\frac{b_2(b_1-b_2)}{b_3}\Gamma_2z_1.$$

Мы имѣемъ кромѣ того:

$$(b_1+b_2)u+(b_2-b_1)v=\Gamma_3-4b_1\sqrt{b_2(a_3-a_2)}\,x_3y_3=$$

$$=I_3-2\sqrt{\frac{b_1b_2}{b_3}}\sqrt{\Gamma_2-\frac{uvb_1}{z_1}}\sqrt{-\frac{b_2-b_1}{b_1}z_1-\Gamma_1},$$

т. е.

$$\{(b_1+b_2)u+(b_2-b_1)v-\Gamma_3\}^2=-4(b_1+b_2)\left(I_2-\frac{uvb_1}{z_1}\right)\left(\frac{b_2-b_1}{b_1}z_1+\Gamma_1\right)$$

или

$$(b_2-b_1)^2v^2+2(b_2-b_1)v\left[\{(b_1+b_2)u-\Gamma_3\}-2\frac{b_1+b_2}{b_2-b_1}\frac{uvb_1}{z_1}\left(\Gamma_1+\frac{b_2-b_2}{b_1}z_1\right)\right]+$$

$$+((b_1+b_2)u-I'_3)^2+4(b_1+b_2)\Gamma_2\left(\Gamma_1+\frac{b_2-b_1}{b_1}z_1\right)=0,$$

т. е.

$$(b_2-b_1)^2 v^2+(b_1+b_2)^2 u^2-2\Gamma_3(b_1+b_2)u+\Gamma_3^2+4(b_1+b_2)\Gamma_1\Gamma_2+4\frac{b_2^2-b_1^2}{b_1}\Gamma_2 z_1=$$

$$=2(b_1-b_2)v\left[\{(b_1+b_2)u-\Gamma_3\}-2\frac{b_1+b_2}{b_1-b_1}\frac{ub_1}{z_1}\left(\Gamma_1+\frac{b_2-b_1}{b_1}z_1\right)\right]. \qquad (20)$$

Интегралъ (19), который можетъ быть написанъ въ видѣ:

$$\frac{4(b_2+b_1)\Big\{(b_2-b_1)^2 v^2+(b_1+b_2)^2 u^2-2\Gamma_3(b_1+b_2)u+}{v}$$

$$\frac{+\Gamma_3^2+4(b_1+b_2)\Gamma_1\Gamma_2-4\frac{b_2(b_1-b_2)}{b_3}\Gamma_2 z_1\Big\}}{v}-$$

$$-8\frac{(b_1+b_2)(b_2^2-b_1^2)u^2+2\frac{b_2(b_2-b_1)^2}{b_3}\Gamma_2 z_1}{u}=const=\Gamma_4,$$

при помощи (20) можетъ быть приведенъ къ виду:

$$8(b_1^2-b_2^2)\left\{\{(b_1+b_2)u-\Gamma_3\}-2\frac{b_1+b_2}{b_2-b_1}\frac{ub_1}{z_1}\left(\Gamma_1+\frac{b_2-b_1}{b_1}z_1\right)\right\}u-$$

$$-8(b_1+b_2)(b_2^2-b_1^2)u^2-16\frac{(b_2-b_1)^2}{b_3}\Gamma_2 b_2 z_1=\Gamma_4 u$$

или

$$az_1^2+bz_1u+cu^2=0, \qquad (21)$$

гдѣ

$$a=16\frac{(b_2-b_1)^2}{b_3}\Gamma_2 b_2,$$

$$b=\Gamma_4+8(b_1^2-b_2^2)\Gamma_3,$$

$$c=-16(b_1+b_2)^2 b_1\Gamma_1.$$

Изъ (21) слѣдуетъ

$$\frac{u}{z_1}=const \qquad (22)$$

или

$$\frac{\xi_1\xi_2-\eta_1\eta_2}{\xi_1\eta_1}=const$$

или

$$\frac{b_1x_1y_1+b_2x_2y_2}{(a_3-a_2)x_2^2-b_1y_1^2}=const=\gamma_0.$$

для нижнихъ знаковъ, совокупность которыхъ можно заключить въ одно уравненіе

$$\frac{ds_1^2}{s_1(s_1-k_1)(s_1-k_2)} - \frac{ds_2^2}{s_2(s_2-k_1)(s_2-k_2)} = 0.$$

Интеграломъ этихъ дифференціальныхъ уравненій служитъ выраженіе

$$\frac{\sqrt{s_1}\,\sqrt{(s_2-k_1)(s_2-k_2)} \pm \sqrt{s_2}\,\sqrt{s_1-k_1)(s_1-k_2)}}{s_1s_2-k_1k_2} = const.$$

Умноживъ числитель на сопряженное съ нимъ выраженіе

$$\sqrt{s_1}\,\sqrt{(s_2-k_1)(s_2-k_2)} \mp \sqrt{s_2}\,\sqrt{(s_1-k_1)(s_1-k_2)}$$

мы приведемъ этотъ интегралъ къ виду

$$\frac{(\sqrt{s_1}+\sqrt{s_2})^2(s_1s_2+k_1k_2-2\Gamma_3\sqrt{s_1s_2}) - \frac{16b_2(b_1-b_2)}{b_3}\Gamma_2\sqrt{s_1s_2}.z_1}{(s_2-s_1)^2} = const.$$

Выразимъ при помощи этого интеграла u черезъ z_1 или черезъ z_2; введя въ него вмѣсто s_1, s_2 ихъ выраженія мы найдемъ:

$$\frac{4(b_1+b_2)u(L^2-2\Gamma_3L+N)-M}{uv} = const, \tag{19}$$

гдѣ

$$L = (b_1+b_2)u-(b_2-b_1)v,$$

$$N = \Gamma_3^2 + 4(b_1+b_2)\Gamma_1\Gamma_2,$$

$$M = 16((b_1+b_2)u-(b_2-b_1)v)\frac{b_2(b_1-b_2)}{b_3}\Gamma_2z_1.$$

Мы имѣемъ кромѣ того:

$$(b_1+b_2)u+(b_2-b_1)v = \Gamma_3 - 4b_1\sqrt{b_2(a_3-a_2)}\,x_3y_3 =$$

$$= \Gamma_3 - 2\sqrt{\frac{b_1b_2}{b_3}}\sqrt{\Gamma_2-\frac{uvb_1}{z_1}}\sqrt{-\frac{b_2-b_1}{b_1}z_1-\Gamma_1},$$

т. е.

$$\{(b_1+b_2)u+(b_2-b_1)v-\Gamma_3\}^2 = -4(b_1+b_2)\left(\Gamma_2-\frac{uvb_1}{z_1}\right)\left(\frac{b_2-b_1}{b_1}z_1+\Gamma_1\right)$$

или

$$(b_2-b_1)^2v^2+2(b_2-b_1)v\left[\{(b_1+b_2)u-\Gamma_3\}-2\frac{b_1+b_2}{b_2-b_1}\frac{uvb_1}{z_1}\left(\Gamma_1+\frac{b_2-b_1}{b_1}z_1\right)\right]+$$

$$+((b_1+b_2)u-\Gamma_3)^2+4(b_1+b_2)\Gamma_2\left(\Gamma_1+\frac{b_2-b_1}{b_1}z_1\right)=0,$$

т. е.

$$(b_2-b_1)^2 v^2+(b_1+b_2)^2 u^2-2\Gamma_3(b_1+b_2)u+\Gamma_3^2+4(b_1+b_2)\Gamma_1\Gamma_2+4\frac{b_2^2-b_1^2}{b_1}\Gamma_2 z_1 =$$

$$=2(b_1-b_2)v\left[\{(b_1+b_2)u-\Gamma_3\}-2\frac{b_1+b_2}{b_1-b_1}\frac{ub_1}{z_1}\left(\Gamma_1+\frac{b_2-b_1}{b_1}z_1\right)\right]. \qquad (20)$$

Интегралъ (19), который можетъ быть написанъ въ видѣ:

$$\frac{4(b_2+b_1)\Big\{(b_2-b_1)^2v^2+(b_1+b_2)^2u^2-2\Gamma_3(b_1+b_2)u+}{v}$$

$$\frac{+\Gamma_3^2+4(b_1+b_2)\Gamma_1\Gamma_2-4\frac{b_2(b_1-b_2)}{b_3}\Gamma_2 z_1\Big\}}{v}-$$

$$-8\frac{(b_1+b_2)(b_2^2-b_1^2)u^2+2\frac{b_2(b_2-b_1)^2}{b_3}\Gamma_2 z_1}{u}=const=\Gamma_4,$$

при помощи (20) можетъ быть приведенъ къ виду:

$$8(b_1^2-b_2^2)\left\{\{(b_1+b_2)u-\Gamma_3\}-2\frac{b_1+b_2}{b_2-b_1}\frac{ub_1}{z_1}\left(\Gamma_1+\frac{b_2-b_1}{b_1}z_1\right)\right\}u-$$

$$-8(b_1+b_2)(b_2^2-b_1^2)u^2-16\frac{(b_2-b_1)^2}{b_3}\Gamma_2 b_2 z_1=\Gamma_4 u$$

или

$$az_1^2+bz_1u+cu^2=0, \qquad (21)$$

гдѣ

$$a=16\frac{(b_2-b_1)^2}{b_3}\Gamma_2 b_2,$$

$$b=\Gamma_4+8(b_1^2-b_2^2)\Gamma_3,$$

$$c=-16(b_1+b_2)^2 b_1\Gamma_1.$$

Изъ (21) слѣдуетъ

$$\frac{u}{z_1}=const \qquad (22)$$

или

$$\frac{\xi_1\xi_2-\eta_1\eta_2}{\xi_1\eta_1}=const$$

или

$$\frac{b_1x_1y_1+b_2x_2y_2}{(a_3-a_2)x_2^2-b_1y_1^2}=const=\gamma_0.$$

Кромѣ того изъ послѣднихъ 2-хъ дифференціальныхъ уравненій (5) слѣдуетъ при помощи (18) интегралъ

$$x_3 - \frac{a_3 - a_2}{a_2 - a_1}\gamma_0 y_3 = const = \gamma_1.$$

ГЛАВА VIII.

Приведеніе задачи главы VII къ эллиптическимъ функціямъ и выраженіе въ нихъ величинъ, опредѣляющихъ движеніе твердаго тѣла.

Мы сдѣлали въ предыдущей главѣ предположеніе, что постоянная Γ интеграла дифференціальныхъ уравненій движенія тѣла въ жидкости

$$b_2(a_3 - a_1)(x_1^2 + x_2^2) - (b_2^2 y_2^2 + b_1^2 y_1^2) = \Gamma$$

равна 0 и показали, что въ этомъ случаѣ дифференціальныя уравненія движенія допускаютъ еще интегралъ

$$\frac{b_1 x_1 y_1 + b_2 x_2 y_2}{(a_3 - a_2)\, x_2^2 - b_1 y_1^2} = \gamma_0 \text{ [1]}, \tag{1}$$

который очевидно не представляетъ слѣдствія изъ основныхъ 4-хъ интеграловъ, имѣющихся для даннаго случая. Мы нашли кромѣ того еще интегралъ

$$x_3 - \frac{a_3 - a_2}{a_2 - a_1}\gamma_0 \cdot y_3 = \gamma_1 \text{ [2]}. \tag{2}$$

Мы имѣемъ

$$l^2(x_1^2 + x_2^2) - (b_1 x_1 y_1 + b_2 x_2 y_2)^2 = (b_2 y_2 x_1 - b_1 y_1 x_2)^2 \tag{3}$$

гдѣ

$$l = +\sqrt{b_2(a_3 - a_1)} = +\sqrt{b_1(a_3 - a_2)}.$$

Поэтому, принявъ во вниманіе интегралы

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = J^2 \quad \text{и} \quad (a_1 - a_2)\, b_2 x_2^2 + (b_1 - b_2)\, b_1 y_1^2 = b_3 b_2 y_3^2 + \Gamma_1,$$

мы найдемъ

$$\left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2 = (b_2 y_2 x_1 - b_1 y_1 x_2)^2 = l^2(J^2 - x_3^2)^2 - \gamma_0^2((a_3 - a_2)\, x_2^2 - b_1 y_1^2)^2,$$

---

[1]) Этотъ интегралъ легко повѣряется и непосредственнымъ дифференцированіемъ.

[2]) Этотъ интегралъ есть какъ легко убѣдиться слѣдствіе уже полученныхъ, но мы удержимъ его вмѣсто одного изъ нихъ.

$$(a_3 - a_2)\ x_2^2 - b_1 y_1^2 = \frac{(a_1 - a_2)\, b_2}{b_2 - b_1}\, x_2^2 - b_1 y_1^2 =$$

$$= \frac{1}{b_2 - b_1}\left((a_1 - a_2)\, b_2 x_2^2 + b_1\,(b_1 - b_2)\, y_1^2\right) = \frac{1}{b_2 - b_1}\,(b_2 b_3 y_3^2 + \Gamma_1),$$

такъ какъ

$$(a_3 - a_2)\ (b_2 - b_1) = (a_1 - a_2)\, b_2 \tag{4}$$

и

$$\left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2 = l^2\,(J^2 - x_3^2) - \frac{\gamma_0^2}{(b_2 - b_1)^2}\,(b_2 b_3 y_3^2 + \Gamma_1)^2,$$

а слѣдовательно

$$\frac{dx_3}{dt} = l\sqrt{(J^2 - x_3^2)^2 - \frac{\gamma_0^2}{(b_2 - b_1)^2\, l^2}\left(b_2 b_3 \frac{(a_2 - a_1)^2}{\gamma_0^2\,(a_3 - a_2)^2}(x_3 - \gamma_1)^2 + I_1\right)^2} \tag{5}$$

или

$$\left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2 = l^2\left((J^2 - x_3^2)^2 - (\alpha + \beta x_3 + \gamma x_3^2)^2\right)$$

$$= l^2\,(x_3^4\,(1 - \gamma^2) - 2\beta\gamma x_3^3 + \ldots.),$$

гдѣ α, β, γ.... нѣкоторыя постоянныя.

Опредѣливъ инваріанты g_2, g_3 и величину v [1]), мы найдемъ:

$$x_3 = \frac{\beta\gamma}{2\,(1 - \gamma^2)} + z,$$

гдѣ

$$z = \frac{1}{2}\,\frac{p'(u) - p'(v)}{p(u) - p(v)} = \zeta(u + v) - \zeta(u) - \zeta(v)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = l\sqrt{x_3^4\,(1 - \gamma^2) - 2\beta\gamma x_3^3 + \ldots} = l\sqrt{1 - \gamma^2}\,\left(p(u) - p(u + v)\right)$$

$$du = l\sqrt{1 - \gamma^2}\, dt.$$

Выраженіе

$$(\alpha + \beta x_3 + \gamma x_3^2)^2 + \frac{1}{l^2}\left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2 \text{ равное } (J^2 - x_3^2)^2$$

раскладывается на 2 множителя:

$$\Phi = \frac{1}{l}\,\frac{dx_3}{dt} - i\,(\alpha + \beta x_3 + \gamma x_3^2) \tag{6}$$

$$\Phi_1 = \frac{1}{l}\,\frac{dx_3}{dt} + i\,(\alpha + \beta x_3 + \gamma x_3^2) \tag{6 bis}$$

[1]) Halphen Tr. d f. ell.

Каждый изъ этихъ множителей представляетъ эллиптическую функцію; полюсы обѣихъ функцій одинаковы: двойной полюсъ $u=0$ и двойной $u=-v$, но нулей общихъ нѣтъ, такъ какъ, если бы они оказались, они оказались бы и у 2-хъ функцій $\alpha+\beta x_3+\gamma x_3^2$ и $(J^2-x_3^2)^2$, последнее же возможно только въ томъ случаѣ, если у этихъ функцій общій линейный множитель x_3+k и тогда нашъ дифференціалъ не эллиптическій, а мы будемъ его предполагать эллиптическимъ. Для опредѣленія нулей функцій Φ и Φ_1 мы замѣтимъ, что одна изъ этихъ функцій переходитъ въ другую (съ —), отъ замѣны u на $-(u+v)$, такъ какъ x_3 отъ этой замѣны не измѣнится, а $\frac{dx_3}{dt}$ измѣнитъ знакъ. Поэтому послѣ этой замѣны корни Φ должны перейти въ корни Φ_1 и наоборотъ. Съ другой стороны

$$\Phi\Phi_1=(J^2-x_3^2)^2.$$

Всякій двучленъ x_3+M мы можемъ представить въ видѣ разности

$$z-z_m,\ \text{гдѣ}\ z_m=\zeta(m+v)-\zeta(m)-\zeta(v).$$

Пусть $x_3-J=z-z_a$, а $x_3+J=z-z_b$, тогда

$$x_3^2-J^2=(z-z_a)(z-z_b)=\frac{\sigma^2 v\sigma(u-a)\sigma(u-b)\sigma(u+a+v)\sigma(u+b+v)}{\sigma a\sigma b\sigma(a+v)\sigma(b+v)\sigma^2 u\sigma^2(u+v)}.$$

а слѣдовательно нули функціи $(J^2-x_3^2)^2$ будутъ:

a, b, $-a-v$, $-b-v$ (двойные), а полюсы 0 и $-v$ (двойные).

Теперь очевидно, что корни одной изъ функцій Φ и Φ_1 будутъ a, b (двойные) другой $-a-v$, $-b-v$ (двойные) или одной a, $-b-v$ (двойные), другой: b, $-a-v$ (двойные). Такъ какъ a и b у насъ точно не фиксированы (вмѣсто нихъ мы всегда можемъ вообразить $-a-v$, $-b-v$, такъ какъ $z_a=z_{-a-v}$, $z_b=z_{-b-v}$), мы можемъ всегда вообразить ихъ такъ выбранными, что корни

Φ будутъ a, b; корни Φ_1: $-a-v$, $-b-v$.

Поэтому:

$$\Phi=Ce^{cu}\frac{\sigma^2 v\sigma^2(u-a)\sigma^2(u-b)}{\sigma^2 a\sigma^2 b\sigma^2 u\sigma^2(u+v)} \tag{7}$$

$$\Phi_1=C_1e^{c_1u}\frac{\sigma^2 v\sigma^2(u+a+v)\sigma^2(u+b+v)}{\sigma^2(a+v)\sigma^2(b+v)\sigma^2 u\sigma^2(u+v)} \tag{7 bis}$$

гдѣ C, C_1, c, c_1 нѣкоторыя постоянныя.

Для опредѣленія C и C_1 мы умножаемъ обѣ части этихъ равенствъ

на u^2 и беремъ предѣлъ при $u=0$; найдемъ:

$$C=\sqrt{1-\gamma^2}-i\gamma$$
$$C_1=\sqrt{1-\gamma^2}+i\gamma.$$

Для опредѣленія c и c_1 замѣтимъ что вслѣдствіе (6): $c_1=-c$; составивъ теперь при помощи (6) и (7) $\frac{d}{dt}\lg\frac{\Phi}{\Phi_1}$ и, сравнивъ результаты при $u=0$ (и слѣд. $x_3=\infty$), мы найдемъ:

$$c=\frac{i\beta}{\sqrt{1-\gamma^2}}+\zeta(a)+\zeta(b)+\zeta(a+v)+\zeta(b+v).$$

Тотъ же результатъ получается сравненіемъ коэффиціента у $\frac{1}{u}$ въ выраженіи $\frac{\Phi}{C}-\frac{\Phi_1}{C_1}$, составленномъ при помощи (6) и при помощи (7).

Выраженіе $(\alpha+\beta x_3+\gamma x_3^2)^2+\frac{1}{l^2}\left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2$ можно разложить на множители еще такъ:

$$\left(\alpha+\beta x_3+\gamma x_3^2+\frac{i}{l}\frac{dx_3}{dt}\right)\times\left(\alpha+\beta x_3+\gamma x_3^2-\frac{i}{l}\frac{dx_3}{dt}\right).$$

Каждый изъ этихъ множителей можетъ быть представленъ въ такомъ же видѣ какъ Φ и Φ_1 (отъ которыхъ эти множители отличаются только постоянными) и мы можемъ положить:

$$\left.\begin{aligned}\alpha+\beta x_3+\gamma x_3^2+\frac{i}{l}\frac{dx_3}{dt}&=Ce^{cu}\frac{\sigma^2 v\,\sigma^2(u-a)\,\sigma^2(u-b)}{\sigma^2 a\,\sigma^2 b\,\sigma^2 u\,\sigma^2(u+v)}\,,\\ \alpha+\beta x_3+\gamma x_3^2-\frac{i}{l}\frac{dx_3}{dt}&=C_1e^{-cu}\frac{\sigma^2 v\,\sigma^2(u+a+v)\,\sigma^2(u+b+v)}{\sigma^2(a+v)\,\sigma^2(b+v)\,\sigma^2 u\,\sigma^2(u+v)}\end{aligned}\right\}\ldots(8)$$

гдѣ

$$C=\gamma+i\sqrt{1-\gamma^2}\quad C_1=\gamma-i\sqrt{1-\gamma^2}$$
$$c=\frac{i\beta}{\sqrt{1-\gamma^2}}+\zeta(a)+\zeta(b)+\zeta(a+v)+\zeta(b+v)$$

Составимъ теперь на основаніи дифференціальныхъ уравненій движенія:

$$(x_1+ix_2)(y_1b_1-iy_2b_2)=y_1b_1x_1+y_2b_2x_2+i(y_1b_1x_2-y_2b_2x_1)$$
$$(x_1+ix_2)(y_1b_1+iy_2b_2)=y_1b_1x_1+y_2b_2x_2-i(y_1b_1x_2-y_2b_2x_1)$$
$$=\left(\alpha+\beta x_3+\gamma x_3^2-\frac{i}{l}\frac{dx_3}{dt}\right)l$$
$$=\left(\alpha+\beta x_3+\gamma x_3^2+\frac{i}{l}\frac{dx_3}{dt}\right)l$$

и слѣдовательно примѣнивъ 2-ой способъ разложенія мы найдемъ

$$(y_1b_1 - iy_2b_2)(x_1 + ix_2) = C_1 e^{-cu} \frac{\sigma^2 v \sigma^2 (u + a + v) \sigma^2 (u + b + v)}{\sigma^2 (a + v) \sigma^2 (b + v) \sigma^2 u \sigma^2 (u + v)} \quad \ldots (9)$$

$$(y_1b_1 + iy_2b_2)(x_1 - ix_2) = Ce^{cu} \frac{\sigma^2 v \sigma^2 (u - a) \sigma^2 (u - b)}{\sigma^2 a \sigma^2 b \sigma^2 u \sigma^2 (u + v)} \quad \ldots . (9\,\text{bis})$$

Составимъ теперь выраженіе для

$$x_1 \pm ix_2.$$

Мы имѣемъ:

$$d\,log\,(x_1 \pm ix_2) = \frac{x_1 dx_1 + x_2 dx_2 \pm i(x_1 dx_2 - x_2 dx_1)}{x_1^2 + x_2^2} \qquad (10)$$

Но

$$\frac{x_1 dx_1 + x_2 dx_2}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{1}{2} dlg\,(J^2 - x_3^2) =$$

$$\frac{1}{2}(\zeta(u - a) + \zeta(u - b) + \zeta(u + a + v) + \zeta(u + b + v) -$$

$$- 2\zeta u - 2\zeta(u + v))\,du \qquad (11)$$

Составимъ теперь выраженіе для остальной части (10):

$$\pm \frac{i(x_1 dx_2 - x_2 dx_1)}{x_1^2 + x_2^2} = \pm \frac{i\left(x_1 \frac{dx_2}{du} - x_2 \frac{dx_1}{du}\right)}{x_1^2 + x_2^2} du. \qquad (12)$$

Что выраженіе имѣетъ слѣдующіе полюсы:

$$u = a,\ u = b,\ u = -a - v,\ u = -b - v,\ u = 0,\ u = -v.$$

Опредѣлимъ вычеты, соотвѣтствующіе этимъ полюсамъ.

Для полюсовъ a, b, $-a-v$, $-b-v$ это будутъ величины предѣловъ

$$\text{пред.}\left[\pm \frac{i\left(x_1 \frac{dx_2}{du} - x_2 \frac{dx_1}{du}\right)}{-2x_3 \frac{dx_3}{du}}\right]$$

для разсматриваемаго полюса.

Но

$$x_1 \frac{dx_2}{dt} - x_2 \frac{dx_1}{dt} = x_3 (b_1 y_1 x_1 + b_2 y_2 x_2) - y_3 b_3 (x_1^2 + x_2^2)$$

и для $u = a,\ b,\ -a-v,\ -b-v$:

$$x_3 = \pm J,$$

$$b_1 x_1 y_1 + b_2 x_2 y_2 = (\alpha + \beta x_3 + \gamma x_3^2)\,l = \pm i \frac{dx_3}{dt},$$

гдѣ — соотвѣтствуетъ полюсамъ $u=a$ и $u=b$, для которыхъ $\Phi=0$ ((6) и (7)), а + соотвѣтствуетъ полюсамъ $u=-a-v$ и $u=-b-v$ для кото- $\Phi_1=0$ ((6 bis) и (7 bis)).

Такимъ образомъ вычеты (12) будутъ:

$$\mp\frac{1}{2} \text{ — для полюсовъ } u=a \text{ и } u=b$$

и

$$\pm\frac{1}{2} \text{ — для полюсовъ } u=-a-v \text{ и } u=-b-v$$

Найдемъ теперь вычеты для $u=0$ и $u=v$, когда $x_3=\infty$,

Легко видѣть, что вычеты (12) для этихъ u равны 0, такъ какъ это выраженіе при $x_3=\infty$ равное

$$\text{пред.}\left\{\pm\frac{i\left(x_3\left(b_1y_1x_1+b_2y_2x_2\right)-y_3b_3\left(x_1^2+x_2^2\right)\right)}{l\sqrt{1-\gamma^2}\left(J^2-x_3^2\right)}\right\}_{x_3=\infty} \qquad (13)$$

есть величина конечная, такъ какъ коэффиціентъ у x_3^2 въ числителѣ равный

$$\pm\left(\gamma l+b_3\frac{a_2-a_1}{(a_3-a_2)\gamma_0}\right)i$$

равенъ 0, ибо по (5):

$$\gamma=\frac{(a_2-a_1)^2\,b_2b_3}{l\,(b_2-b_1)\,\gamma_0\,(a_3-a_2)^2},$$

а

$$\frac{b_2-b_1}{b_2}+\frac{a_2-a_1}{a_3-a_2}=0,$$

такъ какъ по (4)

$$b_2(a_2-a_1)+(a_3-a_2)(b_2-b_1)=0.$$

Такимъ образомъ мы найдемъ для (12) выраженіе

$$\frac{1}{2}\left(\mp\zeta(u-a)\mp\zeta(u-b)\pm\zeta(u+a+v)\pm\zeta(u+b+v)\right)\pm D,$$

гдѣ D есть нѣкоторая постоянная и слѣдовательно

$$\left.\begin{aligned} x_1+ix_2&=C'\times e^{Du}\frac{\sigma(u+a+v)\,\sigma(u+b+v)}{\sigma u\,\sigma(u+v)}\\ \text{а}\qquad x_1-ix_2&=C'_1\times e^{-Du}\frac{\sigma(u-a)\,\sigma(u-b)}{\sigma u\,\sigma(u+v)}\end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

гдѣ постоянныя C' и C'_1 удовлетворяютъ условію:

$$C'C'_1=-\frac{\sigma^2 v}{\sigma a\sigma b\sigma(a+v)\,\sigma(b+v)}$$

а слѣдовательно изъ (9) и (9 bis) найдемъ:

$$y_1 b_1 + i y_2 b_2 = \frac{C}{C'_1} e^{(c+D)u} \frac{\sigma^2 v \sigma(u-a)\sigma(u-b)}{\sigma^2 a \sigma^2 b \sigma u \sigma(u+v)}$$

$$y_1 b_1 - i y_2 b_2 = \frac{C_1}{C'} e^{-(c+D)u} \frac{\sigma^2 v \sigma(u+a+v)\sigma(u+b+v)}{\sigma^2(a+v)\sigma^2(b+v)\sigma u \sigma(u+v)}.$$

Положеніе твердаго тѣла въ пространствѣ мы опредѣляемъ 3-мя Эйлеровыми углами *ж*, *ф*, *э* и

$$J\lambda_z = x_1 \quad J\mu_z = x_2 \quad J\nu_z = x_3,$$

замѣчая, что

$$J = \frac{z_a - z_b}{2} = \frac{\sigma v \sigma(a-b)\sigma(a+b+v)}{2\sigma a \sigma b \sigma(a+v)\sigma(b+v)}$$

мы найдемъ по формулѣ (14)

$$\left.\begin{aligned} \lambda_z + i\mu_z &= 2\varepsilon e^{Du} \frac{\sigma a \sigma b \sigma(u+a+v)\sigma(u+b+v)}{\sigma(a-b)\sigma(a+b+v)\sigma u \sigma(u+v)} \\ \lambda_z - i\mu_z &= -\frac{2}{\varepsilon} e^{-Du} \frac{\sigma(a+v)\sigma(b+v)\sigma(u-a)\sigma(u-b)}{\sigma(a-b)\sigma(a+b+v)\sigma u \sigma(u+v)} \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

гдѣ ε надлежащимъ образомъ опредѣленная постоянная.

А такъ какъ $x_3 = \frac{2z - z_a - z_b}{2}$ (въ данномъ случаѣ $z_a + z_b = 0$ и $x_3 = z$)

$$\nu_z = \frac{2z - z_a - z_b}{z_a - z_b} \quad (16)$$

Найдемъ теперь выраженія для $\nu_x + i\nu_y$ и для $\nu_x - i\nu_y$

$$(\nu_x + i\nu_y)(\nu_x - i\nu_y) = 1 - \nu_z^2 = (\lambda_z + i\mu_z)(\lambda_z - i\mu_z).$$

Поэтому

$$lg\{(\nu_x + i\nu_y)(\nu_x - i\nu_y)\} = const + lg \frac{\sigma(u-a)\sigma(u-b)\sigma(u+a+v)\sigma(u+b+v)}{\sigma^2 u \sigma^2(u+v)} \quad (17)$$

Но

$$\frac{\nu_x - i\nu_y}{\nu_x + i\nu_y} = e^{-2i\text{ж}}.$$

Отсюда, взявъ логариѳмическую производную:

$$\frac{d}{dt} lg \frac{\nu_x - i\nu_y}{\nu_x + i\nu_y} = -2i \frac{d\text{ж}}{dt} = -2i \frac{p\lambda_z + q\mu_z}{1 - \nu_z^2}$$

и слѣдовательно:

$$\frac{d}{dt}\, lg\, \frac{\nu_x - i\nu_y}{\nu_x + i\nu_y} = 2iJ\, \frac{x_1 \frac{\partial T}{\partial y_1} + x_2 \frac{\partial T}{\partial y_2}}{x_3^2 - J^2} = 2iJ \frac{b_1 x_1 y_1 + b_2 x_2 y_2}{x_3^2 - J^2}$$

$$= 2iJl\, \frac{\alpha + \beta x_3 + \gamma x_3^2}{x_3^2 - J^2}.$$

Это выраженіе имѣетъ 4 полюса: $u = a$, $u = b$, $u = -a - v$ и $u = -b - v$.

Вычеты, соотвѣтствующіе этимъ полюсамъ опредѣлятся какъ

$$\text{пред.} \left\{ 2\, iJl\, \frac{\alpha + \beta x_3 + \gamma x_3^2}{2 x_3 \frac{dx_3}{du}} \right\} \text{ для разсматриваемаго полюса.}$$

Но всѣ полюсы корни Φ или Φ_1 (6 и 6 *bis*) и потому для $u = a$ и $u = b$ (корни Φ)

$\frac{dx_3}{dt} = li(\alpha + \beta x_3 + \gamma x_3^2)$, а для $u = -a - v$ и $u = -b - v$ (корни Φ_1)

$$\frac{dx_3}{dt} = -il\,(\alpha + \beta x_3 + \gamma x_3^2);$$

$x_3 = + J$, если дѣло идетъ о полюсахъ a и $-(a + v)$ и $= -J$, для полюсовъ b и $-(b + v)$.

Соотвѣтственно этому вычеты будутъ

$$\pm \frac{du}{dt} = \pm l \sqrt{1 - \gamma^2}$$

гдѣ $+$ надо взять для полюсовъ a и $-b - v$ и $-$ для полюсовъ b и $-a - v$ и мы получимъ

$$\frac{d}{du}\, lg\, \frac{\nu_x - i\nu_y}{\nu_x + i\nu_y} = \zeta(u - a) + \zeta(u + b + v) - \zeta(u - b) - \zeta(u + a + v) - D_1$$

гдѣ D_1 постоянная для опредѣленія которой положимъ $u = 0$ (а $x_3 = \infty$).

$$D_1 = \zeta(b) + \zeta(b + v) - \zeta(a) - \zeta(a + v).$$

Отсюда

$$lg\, \frac{\nu_x - i\nu_y}{\nu_x + i\nu_y} = lg\, \frac{\sigma(u + b + v)\, \sigma(u - a)}{\sigma(u - b)\, \sigma(u + a + v)} - D_1 u + const.$$

и мы получимъ отсюда на основаніи (17), обозначивъ черезъ E посто-

янную произвольную

$$\left.\begin{aligned} \nu_x + i\nu_y &= -2E\frac{\sigma a\,\sigma(b+v)\,\sigma(u+a+v)\,\sigma(u-b)}{\sigma(a-b)\,\sigma(a+b+v)\,\sigma u\,\sigma(u+v)}\,e^{D_1 u} \\ \nu_x - i\nu_y &= \frac{2}{E}\frac{\sigma b\,\sigma(a+v)\,\sigma(u-a)\,\sigma(u+b+v)}{\sigma(a-b)\,\sigma(a+b+v)\,\sigma u\,\sigma(u+v)}\,e^{-D_1 u} \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Положивъ въ формулахъ (15) (16) (18)

$$u = -u_0 \quad v = u_1 + u_0$$

$$b = -\frac{1}{2}(-v_0 - v_1 + u_0 + u_1)$$

$$a = -\frac{1}{2}(v_0 - v_1 + u_0 + u_1)$$

$$E_0 = \varepsilon\,\frac{\sigma a\,\sigma b}{\sigma(a+v)\,\sigma(b+v)}$$

мы приведемъ ихъ къ виду:

$$\nu_x + i\nu_y = \frac{2E}{\sigma u_0\,\sigma v_0\,\sigma u_1\,\sigma v_1}\,\Pi\,\sigma\left(\frac{u_0 + v_0 \pm u_1 \pm v_1}{2}\right)e^{D_1 u}$$

$$\nu_x - i\nu_y = -\frac{2}{E\sigma u_0\sigma v_0\sigma u_1\sigma v_1}\,\Pi\,\sigma\left(\frac{u_0 - v_0 \pm u_1 \pm v_1}{2}\right)e^{-D_1 u}$$

$$\lambda_z + i\mu_z = \frac{2E_0}{\sigma u_0\,\sigma v_0\,\sigma u_1\,\sigma v_1}\,\Pi\,\sigma\left(\frac{u_1 + v_1 \pm u_0 \pm v_0}{2}\right)e^{Du}$$

$$\lambda_z - i\mu_z = -\frac{2}{E_0\sigma u_0\sigma v_0\sigma u_1\sigma v_1}\,\Pi\,\sigma\left(\frac{u_1 - v_1 \pm u_0 \pm v_0}{2}\right)e^{-Du}$$

$$\nu_z = \frac{2\zeta u_0 + 2\zeta u_1 - \sum\zeta\,\dfrac{u_0 + u_1 \pm v_0 \pm v_1}{2}}{\sum\zeta\,\dfrac{u_0 + u_1 \pm (v_0 - v_1)}{2} - \sum\zeta\,\dfrac{u_0 + u_1 \pm (v_0 + v_1)}{2}}$$

Сравнивая эти формулы съ формулами сложенія трехгранныхъ угловъ Halphen'а [1]), мы заключимъ, что разсматриваемое движеніе складывается изъ 2-хъ движеній à la Poinsot, аналогично теоремѣ Якоби для вращенія гироскопа и теоремѣ Halphen'а для движенія въ жидкости въ случаѣ Киргоффа.

Затѣмъ еще одно заключеніе, которое мы можемъ сдѣлать изъ нашихъ формулъ.

---

[1]) Liouville 4 серія, т. 4 1888 г. стр. 15—18 и 71.

Имѣемъ:

$$\sin^2 \phi \frac{d\text{ж}}{dt} = p\lambda_1 + q\mu_1 = \frac{1}{J}(px_1 + qx_2)$$

Отсюда

$$\frac{d\text{э}}{dt} = r - \cos\theta \frac{d\text{ж}}{dt}.$$

$$\frac{d\text{э}}{dt} = r - \frac{px_1 + qx_2}{x_1^2 + x_2^2} x_3 = \frac{b_3 y_3 (x_1^2 + x_2^2) - (b_1 y_1 x_1 + b_2 y_2 x_2) x_3}{x_1^2 + x_2^2} \quad (19).$$

Но

$$\text{э} = -\frac{1}{i} lg \frac{\lambda_1 + i\mu_1}{\sin\phi} = -\frac{1}{i} lg \frac{x_1 + ix_2}{\sqrt{J^2 - x_3^2}} \quad (20)$$

и слѣдовательно, замѣчая, что изъ (5):

$$\frac{dx_3}{dt} = \sqrt{R(x_3)}$$

гдѣ

$$R(x_3) = l^2 (x_3^4 (1 - \gamma^2) - 2\beta\gamma x_3^3 + \ldots .)$$

мы найдемъ сравнивая (19) и (20) и принявъ во вниманіе, что на основаніи нашихъ интеграловъ:

$$b_1 x_1 y_1 + b_2 y_2 x_2 = \frac{\gamma_0}{b_2 - b_1}(b_2 b_3 y_3^2 + \Gamma_1)$$

$$y_3 = \frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_2} \frac{1}{\gamma_0}(x_3 - \gamma_1)$$

мы заключимъ, что

$$\int \frac{\frac{b_3(a_2 - a_1)}{\gamma_0(a_3 - a_2)}(x_3 - \gamma_1)(J^2 - x_3^2) - \frac{\gamma_0 x_3}{b_2 - b_1} M}{J^2 - x_3^2} \frac{dx_3}{\sqrt{R(x_3)}}, \quad (21)$$

гдѣ

$$M = b_2 b_3 \frac{(a_2 - a_1)^2}{(a_3 - a_2)^2} \frac{(x_3 - \gamma_1)^2}{\gamma_0^2} + \Gamma_1$$

приводится къ логариѳмамъ, а именно равенъ

$$-\frac{1}{i} lg \frac{x_1 + ix_3}{\sqrt{J^2 - x_3^2}}$$

гдѣ x_1 и x_2 выражены при помощи нашихъ интеграловъ черезъ x_3. Такимъ образомъ и въ разсматриваемомъ случаѣ условія существованія 5-го алгебраическаго интеграла — совпадаютъ съ условіями интегрируемости въ логариѳмахъ нѣкотораго дифференціала (21), приводящагося вообще говоря, къ высшимъ трансцендентнымъ.

Легко видѣть, что это будетъ всякій разъ, когда мы имѣемъ 5 самостоятельныхъ алгебраическихъ интеграловъ (или просто частныхъ рѣшеній) дифференціальныхъ уравненій Эйлера вращенія твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки. Такъ напр. это обстоятельство имѣетъ мѣсто въ случаѣ вращенія тяжелаго твердаго тѣла, разсмотрѣнномъ С. В. Ковалевскою при предположеніи Н. Б. Делоне: $k=0$.

Какъ частные случаи разсмотрѣннаго въ этой главѣ случая движенія твердаго тѣла въ жидкости получаются частные случаи разсмотрѣнные нами въ статьѣ «О нѣкоторыхъ частныхъ рѣшеніяхъ задачи о движеніи твердаго тѣла въ несжимаемой жидкости» (Сборникъ Института Инж. Пут. Сообщ. 1899 г.).

ГЛАВА IX.

Объ одномъ преобразованіи аналогичномъ преобразованію главы V.

Предварительно мы замѣтимъ, что если за оси координатъ неизмѣнно связанныя съ тѣломъ мы возьмемъ не 3 главныя его оси инерціи, а какія угодно 3 взаимно $\perp$-я прямыя, вмѣсто формулъ (5) на стр. 15 [1]), мы должны будемъ взять формулы:

$$\frac{\partial T}{\partial p}=p_{ф}\sin э-\frac{\cos э\,(p_{ж}-p_{э}\cos ф)}{\sin ф}$$

$$\frac{\partial T}{\partial q}=\frac{(p_{ж}-p_{э}\cos ф)\sin э}{\sin ф}+p_{ф}\cos э$$

$$\frac{\partial T}{\partial r}=p_{э}.$$

Предположимъ, что мы имѣемъ, какъ и въ предыдущихъ главахъ законъ площадей

$$\frac{\partial T}{\partial ж'}=const=l.$$

и перейдемъ, какъ и въ главѣ V отъ перемѣнныхъ $э$, $ф$, $p_{э}$, $p_{ф}$ къ новымъ перемѣннымъ s_1, s_2, p_{s_1}, p_{s_2}, положивъ:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial p}&=p_{ф}\sin э-\frac{\cos э\,(l-p_{э}\cos ф)}{\sin ф}=\cos ф\, f_1(s_1,s_2)-\frac{l\cos э}{\sin ф}\\ \frac{\partial T}{\partial q}&=\frac{(l-p_{э}\cos ф)\sin э}{\sin ф}+p_{ф}\cos э=\cos ф\, f_2(s_1,s_2)+\frac{l\sin э}{\sin ф}\end{aligned}\right\}\quad(1).$$

---

[1]) См. примѣчаніе къ стр. 15.

Отсюда

$$p_{\phi} = \cos\phi\,(f_1(s_1, s_2)\sin\vartheta + f_2(s_1, s_2)\cos\vartheta)$$

$$p_{\vartheta} = \sin\phi\,(f_1(s_1, s_2)\cos\vartheta - f_2(s_1, s_2)\sin\vartheta).$$

Какъ и въ главѣ V составимъ функцію

$$\varphi(s_1, s_2, \vartheta, \phi) = \sin\phi\,(f_1\sin\vartheta + f_2\cos\vartheta)$$

и перейдемъ по правилу Якоби отъ каноническихъ перемѣнныхъ ϑ, ϕ, p_{ϑ}, p_{ϕ} къ каноническимъ s_1, s_2, p_{s_1}, p_{s_2}, положивъ:

$$p_{\vartheta} = \frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}, \qquad p_{\phi} = \frac{\partial\varphi}{\partial\phi}$$

$$p_{s_1} = -\frac{\partial\varphi}{\partial s_1}, \qquad p_{s_2} = -\frac{\partial\varphi}{\partial s_2}.$$

Вмѣсто (1) мы могли бы также взять формулы:

$$\frac{\partial T}{\partial p} = \cos\phi\, f_1(s_1, s_2) + \vartheta\,\frac{l\sin\vartheta\sin\phi}{\cos^2\phi}$$

$$\frac{\partial T}{\partial q} = \cos\phi\, f_2(s_1, s_2) + \vartheta\,\frac{l\cos\vartheta\sin\phi}{\cos^2\phi}.$$

и за функцію φ взять

$$\varphi(s_1, s_2, \vartheta, \phi) = \frac{l\vartheta}{\cos\phi} + \sin\phi\,(f_1(s_1, s_2)\sin\vartheta + f_2(s_1, s_2)\cos\vartheta).$$

При $l = 0$ оба эти преобразованія даютъ однѣ и тѣ же формулы. Въ этомъ случаѣ:

$$p_{s_1} = -\sin\phi\left(\frac{\partial f_1}{\partial s_1}\sin\vartheta + \frac{\partial f_2}{\partial s_1}\cos\vartheta\right) = -\mu_z\frac{\partial f_1}{\partial s_1} + \lambda_z\frac{\partial f_2}{\partial s_1}$$

$$p_{s_2} = -\sin\phi\left(\frac{\partial f_1}{\partial s_2}\sin\vartheta + \frac{\partial f_2}{\partial s_2}\cos\vartheta\right) = -\mu_z\frac{\partial f_1}{\partial s_2} + \lambda_z\frac{\partial f_2}{\partial s_2}.$$

Отсюда:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_z &= \frac{p_{s_2}\dfrac{\partial f_1}{\partial s_1} - p_{s_1}\dfrac{\partial f_1}{\partial s_2}}{\Delta} \\ \mu_z &= \frac{p_{s_2}\dfrac{\partial f_2}{\partial s_1} - p_{s_1}\dfrac{\partial f_2}{\partial s_2}}{\Delta} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

гдѣ

$$\Delta = \frac{\partial f_1}{\partial s_1}\,\frac{\partial f_2}{\partial s_2} - \frac{\partial f_2}{\partial s_1}\,\frac{\partial f_1}{\partial s_2}.$$

При помощи этого преобразованія легко получить квадратуры С. А. Чаплыгина [1]) для случая движенія твердаго тѣла въ жидкости, когда живая сила тѣла (и жидкости) выражается въ видѣ:

$$2T = y_1^2 + y_2^2 + 2y_2^3 + (b - c)\, x_1^2 + (b + c)\, x_2^2 + bx_2^3.$$

Положивъ $u = J\lambda_z$, $v = J\mu_z$ мы представимъ $2T$ въ видѣ:

$$2T = y_1^2 + y_2^2 + 2y_3^2 + cJ^2 (\mu^2_z - \lambda^2_z) + const.$$

Уравненіе съ частными производными Якоби-Гамильтона въ перемѣнныхъ s_1 и s_2 будетъ имѣть видъ:

$$(f_1^2 + f_2^2) \cos^2 \varphi + 2 (f_1\lambda_z + f_2\mu_z)^2 + cJ^2 (\mu^2_z - \lambda^2_z) = 2h$$

или

$$f_1^2 + f_2^2 + \lambda^2_z (f_1^2 - f_2^2 - cJ^2) + \mu_z^2 (f_2^2 - f_1^2 + cJ^2) + 4 f_1 f_2 \lambda_z \mu_z = 2h \quad (3)$$

куда вмѣсто λ_z и μ_z подставлены ихъ значенія (2) и положено

$$p_{s_1} = \frac{\partial V}{\partial s_1}\quad p_{s_2} = \frac{\partial V}{\partial s_2}.$$

Чтобы получить квадратуры С. А. Чаплыгина, положимъ

$$f_1 = \varepsilon \sqrt{(s_1 + 1)(s_2 + 1)} \quad f_2 = \varepsilon \sqrt{(s_1 - 1)(1 - s_2)} \quad (4)$$

$$\Delta = \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{s_1 - s_2}{\sqrt{(s_1^2 - 1)(1 - s_2^2)}}$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_z &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{p_{s_1}(1 + s_1) - p_{s_2}(1 + s_2)}{s_1 - s_2} \sqrt{(s_1 - 1)(1 - s_2)} \\ \mu_z &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{p_{s_1}(1 - s_1) - p_{s_2}(1 - s_2)}{s_1 - s_2} \sqrt{(1 + s_1)(1 + s_2)} \end{aligned}\right\}. \quad (5)$$

Подставивъ эти выраженія въ (3) и положивъ $\varepsilon = \frac{\sqrt{c}}{2} J$, мы приведемъ его къ виду

$$\frac{cJ^2}{2}(s_1 + s_2) + 4p_{s_1}^2 (1 - s_1^2) + 4p_{s_2}^2 (1 - s_2^2) = h.$$

---

[1]) Новое частное рѣшеніе задачи о движеніи твердаго тѣла въ жидкости. XI томъ трудовъ Импер. Моск. Об. Л. Е. 1902 г.

Уравненіе съ частными производными будетъ имѣть полнымъ интеграломъ

$$V=\frac{1}{2}\int\sqrt{\frac{J^2cs_1-2h-\Gamma}{2(s_1^2-1)}}ds_1+\frac{1}{2}\int\sqrt{\frac{J^2cs_2-2h+\Gamma}{2(s_2^2-1)}}ds_2,$$

гдѣ Γ произвольная постоянная, а интегралы дифференціальныхъ уравненій движенія будутъ

$$\frac{\partial V}{\partial\Gamma}=const.$$

$$\frac{\partial V}{\partial h}=t_0-t$$

или

$$\int\frac{ds_1}{\sqrt{(s_1^2-1)(J^2cs_1-2h-\Gamma)}}+\int\frac{ds_2}{\sqrt{(s_2^2-1)(J^2cs_2-2h+\Gamma)}}=const$$

$$\int\frac{ds_1}{\sqrt{(s_1^2-1)(J^2cs_1-2h-\Gamma)}}+\int\frac{ds_2}{\sqrt{(s_2^2-1)(J^2cs_2-2h+\Gamma)}}=2\sqrt{2}\,(t_0-t),$$

откуда и получаются квадратуры С. А. Чаплыгина, выражающія s_1 и s_2 въ эллиптическихъ функціяхъ, которыя указаны имъ при помощи найденнаго имъ для этого случая 4-го алгебраическаго интеграла.

При помощи формулъ (4), (5) легко привести къ квадратурамъ задачу о движеніи тѣла при

$$2T=y_1^2+y_2^2+y_3^2+A_1x_1^2+B_1x_2^2+C_1x_3^2.$$

Эти квадратуры могутъ быть, какъ предѣльныя, выведены изъ квадратуръ H. Weber'а (Math. Ann. XIV), но здѣсь рѣшеніе получается въ нѣсколько иной формѣ. Интегралъ живой силы можетъ быть здѣсь написанъ въ видѣ:

$$y_1^2+y_2^2+y_3^2+J^2(A_1-C_1)\lambda_z^2+J^2(B_1-C_1)\mu_z^2=const.=2h. \quad (6)$$

При помощи (4) и (5), положивъ $\varepsilon=J\frac{\sqrt{B_1-A_1}}{2}$, мы приведемъ (6) къ виду:

$$p_{s_1}^2(s_1^2-1)(s_1+1+2\varepsilon_0)-p_{s_2}^2(s_2^2-1)(s_2+1+2\varepsilon_0)=$$

$$=\frac{h}{2}(s_2-s_1)+\frac{J^2(A_1-B_1)}{8}(s_2^2-s_1^2),$$

гдѣ

$$\varepsilon_0=\frac{B_1-C_1}{A_1-B_1}.$$

Полный интегралъ соотвѣтствующаго уравненія съ частными производными будетъ

$$V = \int \frac{\sqrt{\Gamma - \frac{h}{2} s_1 - \frac{J^2 (A_1 - B_1)}{8} s_1^2}}{\sqrt{(s_1^2 - 1)(s_1 + 1 + 2\varepsilon_0)}} ds_1 +$$

$$+ \int \frac{\sqrt{\Gamma - \frac{h}{2} s_2 - \frac{J^2 (A_1 - B_1)}{8} s_2^2}}{\sqrt{(s_2^2 - 1)(s_2 + 1 + 2\varepsilon_0)}} ds_2,$$

а интегралы уравненій движенія:

$$\frac{\partial V}{\partial \Gamma} = const. \quad \text{или}$$

$$\int \frac{ds_1}{\sqrt{(s_1^2 - 1)(s_1 + 1 + 2\varepsilon_0)\varphi(s_1)}} + \int \frac{ds_2}{\sqrt{(s_2^2 - 1)(s_2 + 1 + 2\varepsilon_0)\varphi(s_2)}} = const.$$

$$\text{и} \quad \frac{\partial V}{\partial h} = t - t_0 \quad \text{или}$$

$$\int \frac{s_1 ds_1}{\sqrt{(s_1^2 - 1)(s_1 + 1 + 2\varepsilon_0)\varphi(s_1)}} + \int \frac{s_2 ds_2}{\sqrt{(s_2^2 - 1)(s_2 + 1 + 2\varepsilon_0)\varphi(s_2)}} = 4(t_0 - t),$$

гдѣ

$$\varphi(s) = \Gamma - \frac{h}{2} s - \frac{J^2 (A_1 - B_1)}{8} s^2,$$

т. е. слѣд. задача приведена къ ультраэллиптическимъ функціямъ.

DATE DUE			